

NGHIỆM XẤP XỈ BỞI SAI PHÂN HỮU HẠN CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH SÓNG CHỨA SỐ HẠNG ĐẠO HÀM BẬC BỐN

Nguyễn Hữu Nhân^{1*}, Lê Thị Mai Thanh², Trần Trịnh Mạnh Dũng³

¹Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Ngoại ngữ - Tin học TP.HCM

²Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Nguyễn Tất Thành

³Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học FPT

nhannh1@hufnit.edu.vn, ltmthanh@ntt.edu.vn, dungttm12@fe.edu.vn

TÓM TẮT— Bài báo này khảo sát một phương trình sóng phi tuyến chứa số hạng đạo hàm cấp bốn. Trước tiên, chúng tôi phát biểu các kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán được chứng minh bằng phương pháp Faedo-Galerkin và một số lý luận về tính compact. Tiếp theo, chúng tôi xét một trường hợp cụ thể của bài toán ban đầu và sử dụng sai phân hữu hạn để xây dựng một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán trong trường hợp này. Ngoài ra, chúng tôi cũng thiết lập các bảng số liệu đánh giá sai số giữa nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác theo số bước lặp và theo kích thước của lưới sai phân. Cuối cùng, chúng tôi vẽ một số hình minh họa của nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác theo một số lưới sai phân khác nhau.

Từ khóa— Sai phân hữu hạn, nghiệm xấp xỉ, phương pháp Faedo-Galerkin, phương trình sóng phi tuyến bậc bốn.

I. GIỚI THIỆU

Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán giá trị biên và ban đầu cho một phương trình sóng phi tuyến chứa đạo hàm cấp bốn theo biến không gian được cho như dưới đây

$$u_{tt} + u_{xxxx} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu(x, t, \|u_x(t)\|^2) u_x \right] + \int_0^t g(t-s) u_{xx}(x, s) ds = f(x, t, u, u_x, u_{xx}), 0 < x < 1, t > 0, \tag{1.1}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \tag{1.3}$$

trong đó $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu, g, f$ là các hàm cho trước.

Bài toán (1.1)-(1.3) là một sự tổng quát cho mô hình toán học mô tả độ lệch ngang của các dầm có gân. Mô hình toán học gốc được nghiên cứu bởi Woinowsky-Krieger [1] có dạng như sau:

$$u_{tt} + \alpha u_{xxxx} - \left(\beta + k \int_0^L u_x^2 dx \right) u_{xx} = 0, \tag{1.4}$$

trong đó β là sự dịch chuyển dọc trục ban đầu được đo ở trạng thái không bị kéo căng và $u(x, t)$ biểu thị cho độ lệch ngang của dầm có chiều dài L với hai đầu được cố định. Sau này, có nhiều nghiên cứu về phương trình (1.4), chẳng hạn như công trình của Ball [2] về tính ổn định nghiệm, của Fit [3] về dáng điệu tiệm cận của nghiệm hoặc của Gio và các cộng sự [4] liên quan đến tính hút toàn cục và tính ổn định mũ của nghiệm.

Các phiên bản trong trường hợp nhiều chiều của phương trình (1.4) được biết đến với tên gọi là các phương trình bản Kirchhoff mô tả các dao động lớn của tấm bản mỏng. Công trình tiêu biểu gần đây có thể kể đến là công trình của Liu và các đồng nghiệp [5] cho phương trình bản Kirchhoff có dạng như sau:

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u - \Delta u_t + |u_t|^{r-1} u_t = |u|^{p-1} u, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x). \end{cases} \tag{1.5}$$

Các tác giả đã chứng minh tính bùng nổ nghiệm của bài toán (1.5) trong trường hợp năng lượng ban đầu cao tùy ý. Trong khi đó, Liao và Li [6] đã sử dụng các kỹ thuật về bất đẳng thức để thiết lập được thời gian sống của nghiệm của bài toán (1.5) tại mức năng lượng ban đầu thấp. Ngoài ra, các tác giả cũng chứng minh được sự tồn tại nghiệm toàn cục và tính tắt dần mũ của nghiệm bài toán (1.5). Một số các kết quả khác gần đây về các phương trình bản Kirchhoff có thể tìm thấy trong [7] - [9].

Mặc dù đã có nhiều nghiên cứu về các bài toán biên và ban đầu cho các phương trình dầm có giãn trong cả trường hợp một chiều và nhiều chiều. Tuy nhiên, theo quan sát của chúng tôi thì có rất ít kết quả liên quan đến việc tìm nghiệm xấp xỉ bởi các phương pháp số cho các bài toán loại này. Một số ít các nghiên cứu có thể liệt kê ra ở đây, chẳng hạn như các kết quả nghiên cứu của Achouri [10] về sự tồn tại nghiệm số bởi phương pháp sai phân hữu hạn cùng với tính ổn định và hiệu quả của thuật giải của bài toán giá trị biên và ban đầu cho phương trình dầm có dạng sau:

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + u + f(u) = 0, (x, y) \in \Omega, 0 < t \leq T, \\ u(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) = 0, (x, y) \in \Gamma, 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x), u_t(x, y, 0) = \psi(x), (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

Trong đó Ω là một miền bị chặn trong \mathbb{R}^{d+1} , Γ là biên của Ω , và φ, ψ là các hàm cho trước. Trong [11], Anaya và các đồng nghiệp đã khảo sát một phương trình dầm chứa số hạng đàn hồi nhớt có dạng:

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \int_0^\infty g(s) \Delta u(t-s) ds = 0, \quad (1.7)$$

Liên kết với một điều kiện lịch sử có dạng như sau:

$$u(x, -t) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x). \quad (1.8)$$

Các tác giả đã nghiên cứu tính tắt dần của nghiệm bài toán (1.7)-(1.8). Ngoài ra, một thuật toán cho bởi phương pháp phần tử hữu hạn theo biến không gian liên kết với phương pháp sai phân hữu hạn theo biến thời gian cũng được đề xuất cho việc tìm nghiệm xấp xỉ số của bài toán. Một kết quả khác về một bài toán giá trị biên và ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến gần với bài toán (1.1)-(1.3) nhưng với điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất:

$$u(0, t) = g_0(t), u_x(0, t) = g_1(t), \Delta u(1, t) = \Delta u_x(1, t) = 0, \quad (1.9)$$

Đã được khảo trong [12]. Ở đó, các tác giả đã chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán bằng phương pháp xấp xỉ tuyến tính kết hợp với phương pháp Faedo-Galerkin và một số lí luận về tính compact. Hơn nữa, một thuật toán cho bởi phương pháp sai phân hữu hạn cũng được xây dựng để tìm nghiệm xấp xỉ số, đồng thời các đánh giá sai số của nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác cũng được thực hiện.

Như đã đề cập ở trên, không có nhiều nghiên cứu về nghiệm xấp xỉ được xây dựng bởi các phương pháp số cho các phương trình sóng phi tuyến chứa số hạng đạo hàm bậc bốn. Vì vậy, có thể nói bài báo là một đóng góp có giá trị nhất định cho nghiên cứu về chủ đề này. Cấu trúc của bài báo được chia thành các phần như sau: Phần II trình bày kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (1.1)-(1.3). Phần III trình bày kết quả chính của bài báo là quá trình xây dựng thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ bởi sai phân hữu hạn và mô tả quá trình tính toán tìm nghiệm xấp xỉ. Phần IV trình bày các bảng đánh giá sai số cho bởi thuật toán được xây dựng trong Phần III, và vẽ hình mô phỏng nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác theo các lưới sai phân khác nhau. Trong phần này, các dữ liệu trong các bảng và hình vẽ mô phỏng nghiệm được thực hiện trên nền ngôn ngữ lập trình Matlab. Phần V là phần tóm tắt các kết quả chính thu được trong bài báo và một số hướng nghiên cứu trong tương lai liên quan đến bài báo.

II. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM

Trong phần này, chúng tôi sẽ phát biểu định lí về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu cho bài toán (1.1)-(1.3). Việc chứng minh định lí dựa vào phương pháp xấp xỉ tuyến tính, phương pháp Faedo-Galerkin và các lí luận về tính compact. Trước tiên chúng tôi giới thiệu một số kí hiệu về các không gian hàm thông dụng và một số giả thiết trên các dữ kiện của bài toán (1.1)-(1.3) như sau.

Đặt $\Omega = (0, 1)$. Khi đó, chúng tôi kí hiệu: C^k, L^p, H^m thay cho $C^k(\Omega), L^p(\Omega), H^m(\Omega)$ lần lượt để chỉ không gian liên tục khả vi cấp k , không gian các hàm đo được lũy thừa p khả tích Lebesgue và không gian Sobolev cấp m . Kí hiệu: $\|\cdot\|_X$ để chỉ chuẩn trên không gian X . Chúng tôi cũng sử dụng các kí hiệu: $C^k([0, T]; X), L^p(0, T; X)$ để chỉ không gian các hàm khả vi liên tục cấp k từ đoạn $[0, T]$ vào không gian Banach X , không gian các hàm $u: (0, T) \rightarrow X$ đo được và thỏa $\|u\|_{L^p(0, T; X)} < +\infty$, trong đó

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty, \\ \text{ess sup}_{0 < t < T} \|u(t)\|_X, & p = +\infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

Với một hàm hai biến $u = u(x, t)$, chúng tôi sử dụng các kí hiệu: $u(t), u'(t) = u_t(t), u''(t) = u_{tt}(t), u_x(t), u_{xx}(t), u_{xxx}(t)$ thay cho $u(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t)$.

Đặt: $H_0^1 = \{v \in H^1 : v(0) = v(1) = 0\}$, $V = H^2 \cap H_0^1$ và $H_*^4 = \{v \in H^4 : v(0) = v(1) = v_{xx}(0) = v_{xx}(1) = 0\}$.

Xét $T^* > 0$ cố định, để khảo sát sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (1.1)-(1.3), chúng ta cần các giả thiết sau đây:

- (A₁): $\tilde{u}_0 \in H_*^4, \tilde{u}_1 \in V$;
- (A₂): $\mu \in C^2([0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R}_+)$;
- (A₃): $g \in H^1(0, T^*)$;
- (A₄): $f \in C^2([0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R}^4)$
 $f(0, t, 0, 0, y_1, y_2) = f(1, t, 0, 0, y_1, y_2) = 0$.

Khi đó, chúng ta có định lí sau:

Định lí 2.1. Nếu các giả thiết (A₁)–(A₄) thì tồn tại một số thực $T \in (0, T^*]$ sao cho bài toán (1.1)-(1.3) có duy nhất nghiệm yếu u thỏa mãn $u \in L^\infty(0, T; H_*^4) \cap C^0([0, T]; V), u' \in L^\infty(0, T; V) \cap C^0([0, T]; L^2)$.

Chứng minh chi tiết của định lí có thể thực hiện tương tự như trong bài báo [13].

III. THUẬT TOÁN XẤP XỈ BỞI SAI PHÂN HỮU HẠN

Trong phần này, chúng tôi sẽ xét một trường hợp riêng của bài toán (1.1)-(1.3) và xây dựng một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ số của bài toán tương ứng bằng phương pháp sai phân hữu hạn. Cụ thể, chúng tôi xét bài toán (1.1)-(1.3) trong trường hợp $\mu(x, t, \|u_x(t)\|^2) = \mu(\|u_x(t)\|^2), f(x, t, u, u_t, u_x, u_{xx}) = f(x, t, u, u_x, u_{xx}) - u_t$. Chính xác hơn, chúng ta có bài toán sau đây.

$$u_{tt} + u_t + u_{xxxx} - \mu(\|u_x(t)\|^2) + \int_0^t g(t-s)u_{xx}(x, s)ds = f(x, t, u, u_x, u_{xx}), 0 < x < 1, t > 0, \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad (3.3)$$

trong đó $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu, g, f$ là các hàm được xác định bởi:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(x) &= 2w(x), \tilde{u}_1(x) = -2w(x), w(x) = x^4 - 2x^3 + x, \\ \mu(\|u_x(t)\|^2) &= 1 + 10^{-3} \|u_x(t)\|^2, \\ g(t) &= e^{-3t}, \\ f(x, t, u, u_x, u_{xx}) &= f_1(u, u_x) - \frac{\partial}{\partial x} f_2(u, u_x) + F(x, t), \\ f_1(u, u_x) &= 4u^3(1 + |u_x|^5), f_2(u, u_x) = 5u^4 |u_x|^3 u_x, \\ F(x, t) &= 48e^{-t} - 12(x^2 - x)e^{-t} \left[1 + \left(1 + \frac{136}{35} 10^{-3} \right) e^{-2t} \right] \\ &\quad - 32e^{-3t} w^3(x) \left[1 + 32e^{-5t} |w(x)|^3 \left(4w_x^2(x) - 5(28x^6 - 85x^5 + 60x^4 + 20x^3 - 24x^2 + 1) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Chú ý rằng, với dữ liệu được cho như ở (3.4), nghiệm chính xác của bài toán (3.1)-(3.3) được xác định bởi:

$$u_{ex}(x,t) = (x^4 - 2x^3 + x)e^{-t}. \quad (3.5)$$

A. SAI PHÂN THEO BIẾN KHÔNG GIAN

Xét một phân hoạch trên đoạn $[0,1]$ xác định bởi: $x_i = ih, h = \frac{1}{1+N}, i = \overline{0, N+1}$ và kí hiệu $u_i \equiv u(x_i, t)$. Khi đó, các đạo hàm riêng $u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}$ được xấp xỉ bởi các công thức như sau:

$$\begin{aligned} u_x(x_i, t) &\approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, u_{xx}(x_i, t) \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \\ u_{xxx}(x_i, t) &\approx \frac{-u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2}}{h^3}, u_{xxxx}(x_i, t) \approx \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{h^4}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Thay các xấp xỉ (3.6) vào bài toán (3.1)-(3.3) ta được hệ phương trình vi tích phân sau

$$\begin{cases} u_i''(t) + u_i'(t) + \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{h^4} - \tilde{\mu}(t) \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \\ \quad + \int_0^t g(t-s) \frac{u_{i-1}(s) - 2u_i(s) + u_{i+1}(s)}{h^2} ds = \tilde{f}(x_i, t) \equiv \tilde{f}_i(t), i = \overline{1, N}, \\ u_0 = u_{N+1} = \frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{h^2} = \frac{u_N - 2u_{N+1} + u_{N+2}}{h^2} = 0, \\ u_i(0) = \tilde{u}_0(x_i) \equiv \tilde{u}_{0i}, u_i'(0) = \tilde{u}_1(x_i) \equiv \tilde{u}_{1i}, i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (3.7)$$

trong đó $\tilde{\mu}(t) = \mu(\|u_x(t)\|^2)$, $\tilde{f}_i(t) = f(x_i, t, u_i(t), u_x(x_i, t), u_{xx}(x_i, t)), i = \overline{0, N+1}$.

Chú ý rằng, từ (3.7)₂ ta suy ra rằng:

$$u_0 = u_{N+1} = u_{-1} + u_1 = u_N + u_{N+2} = 0. \quad (3.8)$$

Ngoài ra, sử dụng công thức hình thang và điều kiện $u_0(t) = u(0, t) = 0$, ta có thể xấp xỉ số hạng tích phân $\|u_x(t)\|^2 = \int_0^1 u_x^2(x, t) dx$ như sau:

$$\begin{aligned} \|u_x(t)\|^2 &= \int_0^1 u_x^2(x, t) dx \approx h \left[\frac{u_x^2(x_0, t) + u_x^2(x_{N+1}, t)}{2} + u_x^2(x_1, t) + \dots + u_x^2(x_N, t) \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{u_1^2(t) + u_N^2(t)}{2} + \sum_{i=1}^N (u_i(t) - u_{i-1}(t))^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Do đó, nhờ vào (3.6) và (3.9), các số hạng phi tuyến $\tilde{\mu}(t)$ và $\tilde{f}_i(t)$ như sau:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(t) &= \mu(\|u_x(t)\|^2) \approx \mu \left(\frac{1}{h} \left[\frac{u_1^2(t) + u_N^2(t)}{2} + \sum_{i=1}^N (u_i(t) - u_{i-1}(t))^2 \right] \right) \equiv \hat{\mu}(u_1(t), \dots, u_N(t)) \equiv \hat{\mu}(U(t)), \\ \tilde{f}_i(t) &= f(x_i, t, u_i(t), u_x(x_i, t), u_{xx}(x_i, t)) \approx f \left(x_i, t, u_i(t), \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{h}, \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{h^2} \right), i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Thay (3.10) vào (3.7), và sử dụng (3.8) để loại bỏ $u_0, u_{-1}, u_{N+1}, u_{N+2}$ ta thu được hệ phương trình vi tích phân thường sau đây

$$\left\{ \begin{aligned}
 & u_1''(t) + u_1'(t) + \frac{5u_1 - 4u_2 + u_3}{h^4} - \hat{\mu}(U(t)) \frac{-2u_1 + u_2}{h^2} + \int_0^t g(t-s) \frac{-2u_1(s) + u_2(s)}{h^2} ds \\
 & = f\left(x_1, t, u_1(t), \frac{u_1(t)}{h}, \frac{-2u_1(t) + u_2(t)}{h^2}\right) \equiv F_1(t, U(t)), \\
 & u_i''(t) + u_i'(t) + \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{h^4} - \hat{\mu}(U(t)) \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \\
 & + \int_0^t g(t-s) \frac{u_{i-1}(s) - 2u_i(s) + u_{i+1}(s)}{h^2} ds = f\left(x_i, t, u_i(t), \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{h}, \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{h^2}\right) \\
 & \equiv F_i(t, U(t)), i = \overline{2, N-1}, \\
 & u_N''(t) + u_N'(t) + \frac{u_{N-2} - 4u_{N-1} + 5u_N}{h^4} - \hat{\mu}(U(t)) \frac{u_{N-1} - 2u_N}{h^2} + \int_0^t g(t-s) \frac{u_{N-1}(s) - 2u_N(s)}{h^2} ds \\
 & = f\left(x_N, t, u_N(t), \frac{u_N(t) - u_{N-1}(t)}{h}, \frac{u_{N-1} - 2u_N(t)}{h^2}\right) \equiv F_N(t, U(t)), \\
 & u_i(0) = \tilde{u}_0(x_i) \equiv \tilde{u}_{0i}, u_i'(0) = \tilde{u}_1(x_i) \equiv \tilde{u}_{1i}, i = \overline{1, N},
 \end{aligned} \right. \quad (3.11)$$

trong đó

$$\left\{ \begin{aligned}
 & F_1(t, U(t)) = f\left(x_1, t, u_1(t), \frac{u_1(t)}{h}, \frac{-2u_1(t) + u_2(t)}{h^2}\right), \\
 & F_i(t, U(t)) = f\left(x_i, t, u_i(t), \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{h}, \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{h^2}\right), i = \overline{2, N-1}, \\
 & F_N(t, U(t)) = f\left(x_N, t, u_N(t), \frac{u_N(t) - u_{N-1}(t)}{h}, \frac{u_{N-1} - 2u_N(t)}{h^2}\right).
 \end{aligned} \right. \quad (3.12)$$

Hệ (3.11)-(3.12) có thể viết dưới dạng phương trình vi tích phân theo thời gian như sau:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & U''(t) + U'(t) + AU(t) - \hat{\mu}(U(t))BU(t) + \int_0^t g(t-s)BU(s)ds = F(t, U(t)), \\
 & U(0) = \tilde{U}_0, U'(0) = \tilde{U}_1,
 \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

trong đó

$$\begin{aligned}
 U(t) &= (u_1(t), \dots, u_N(t))^T, U'(t) = (u_1'(t), \dots, u_N'(t))^T, \\
 \tilde{U}_0 &= (\tilde{u}_0(x_1), \dots, \tilde{u}_0(x_N))^T, \tilde{U}_1 = (\tilde{u}_1(x_1), \dots, \tilde{u}_1(x_N))^T, \\
 F(t, U(t)) &= (F_1(t, U(t)), \dots, F_N(t, U(t)))^T,
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

và A, B là các ma trận vuông cấp N được xác định bởi:

$$A = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}, B = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Lấy tích phân theo biến thời gian hai vế (3.13), ta được:

$$\begin{cases} U'(t) = e^{-t}\tilde{U}_1 - \int_0^t e^{-(t-s)}AU(s)ds - \int_0^t e^{-(t-s)}\hat{\mu}(U(s))BU(s)ds \\ \quad - \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau \int_0^\tau g(\tau-s)BU(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)}F(s,U(s))ds, \\ U(0) = \tilde{U}_0. \end{cases} \quad (3.16)$$

B. SỰ TUYẾN TÍNH HÓA VÀ SAI PHÂN THEO BIẾN THỜI GIAN

Chú ý rằng, (3.16) là bài toán Cauchy cho một phương trình vi tích phân thường phi tuyến. Do đó, chúng ta sẽ sử dụng kỹ thuật tuyến tính hóa bởi dãy xấp xỉ liên tiếp $\{U^{(m)}(t)\}$ cho bài toán (3.16) như sau:

$$\begin{cases} \frac{dU^{(m)}}{dt}(t) = \int_0^t e^{-(t-s)}[\hat{\mu}^{(m)}(s)B - A]U^{(m)}(s)ds - \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau \int_0^\tau g(\tau-s)BU^{(m)}(s)ds \\ \quad + \int_0^t e^{-(t-s)}\hat{F}^{(m)}(s)ds + e^{-t}\tilde{U}_1, \\ U^{(m)}(0) = \tilde{U}_0, \end{cases} \quad (3.17)$$

trong đó $\hat{\mu}^{(m)}(t) = \hat{\mu}(U^{(m-1)}(t))$, $\hat{F}^{(m)}(t) = F(t, U^{(m-1)}(t))$.

Xét phân hoạch theo thời gian trên đoạn $[0, T]$ được xác định bởi: $t_j = j\Delta t$, $\Delta t = T/M$, $j = \overline{0, M}$ và đặt

$$\begin{aligned} U_j^{(m)} &= U^{(m)}(t_j), \hat{\mu}_j^{(m)} = \hat{\mu}^{(m)}(t_j) = \hat{\mu}(U^{(m-1)}(t_j)), \hat{F}_j^{(m)} = F(t_j, U^{(m-1)}(t_j)), \\ \frac{dU^{(m)}}{dt}(t_j) &\approx \frac{U_{j+1}^{(m)} - U_j^{(m)}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Khi đó, áp dụng (3.18) vào (3.17), ta được thuật giải sau:

$$\begin{aligned} U^{(m)}(0) &= \tilde{U}_0 = (\tilde{u}_0(x_1), \dots, \tilde{u}_0(x_N))^T, \\ \frac{U_1^{(m)} - U_0^{(m)}}{\Delta t} &= \tilde{U}_1 = (\tilde{u}_1(x_1), \dots, \tilde{u}_1(x_N))^T, j = 0, \\ \frac{U_{j+1}^{(m)} - U_j^{(m)}}{\Delta t} &= \sum_{k=1}^j \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t_j-s)}[\hat{\mu}^{(m)}(s)B - A]U^{(m)}(s)ds - \sum_{k=1}^j \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t_j-\tau)}d\tau \int_0^\tau g(\tau-s)BU^{(m)}(s)ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^j \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t_j-s)}\hat{F}^{(m)}(s)ds + e^{-t_j}\tilde{U}_1, j = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tiếp theo, chúng ta xấp xỉ các tích phân trong (3.19) bởi công thức: $\int_{t_{k-1}}^{t_k} H(s)ds \approx \Delta t H(t_k)$. Khi đó, thuật giải (3.19) trở thành thuật giải sau đây:

$$\begin{aligned} U^{(m)}(0) &= \tilde{U}_0, \\ \frac{U_1^{(m)} - U_0^{(m)}}{\Delta t} &= \tilde{U}_1, j = 0, \\ \frac{U_{j+1}^{(m)} - U_j^{(m)}}{\Delta t} &= \Delta t \sum_{k=1}^j e^{-t_j-k} (\hat{\mu}_k^{(m)}B - A)U_k^{(m)} - (\Delta t)^2 \sum_{k=1}^j \sum_{v=1}^k e^{-t_j-k} g_{k-v}BU_v^{(m)} \\ &\quad + \Delta t \sum_{k=1}^j e^{-t_j-k} \hat{F}_k^{(m)} + e^{-t_j}\tilde{U}_1, j = \overline{1, M-1}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

trong đó $g_j = g(t_j)$, $j = \overline{0, M}$.

C. MÔ TẢ QUÁ TRÌNH TÍNH TOÁN VÀ SAI SỐ CỦA THUẬT TOÁN

Chú ý rằng, từ (3.20), chúng ta sẽ rút ra được một thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x, t)$ tại bước lặp thứ m của thuật giải xấp xỉ tuyến tính (3.17). Thuật toán này thực hiện qua một quá trình tính toán như sau:

(i) Bước lặp đầu tiên ($m = 0$) $U_j^{(0)} = U^{(0)}(t_j) = 0$, $j = \overline{1, M}$.

(ii) Tại bước lặp thứ $m - 1$, giả sử ta đã tính được

$$U_j^{(m-1)} = U^{(m-1)}(t_j) = (u_1^{(m-1)}(t_j), \dots, u_N^{(m-1)}(t_j))^T, j = \overline{1, M}.$$

(iii) Tại bước lặp thứ m , ta tính $U_j^{(m)} = U^{(m)}(t_j) = (u_1^{(m)}(t_j), \dots, u_N^{(m)}(t_j))^T, j = \overline{1, M}$ bởi như sau.

(iii)₁ Tính $\hat{\mu}_j^{(m)}$ và $\hat{F}^{(m)}(t_j)$ bởi:

$$\hat{\mu}_j^{(m)} = \hat{\mu}^{(m)}(t_j) = \hat{\mu}(U^{(m-1)}(t_j)), \hat{F}^{(m)}(t_j) = \hat{F}(t_j, U^{(m-1)}(t_j)), j = \overline{0, M}.$$

(iii)₂ Tính $U_1^{(m)}$ bởi: $U_1^{(m)} = U_0^{(m)} + \Delta t \tilde{U}_1, j = 0$.

(iii)₃ Giả sử tính được các $U_1^{(m)}, U_2^{(m)}, \dots, U_j^{(m)}$, khi đó $U_{j+1}^{(m)}$ được tính nhờ thuật toán (3.20) bởi:

$$U_{j+1}^{(m)} = U_j^{(m)} + (\Delta t)^2 \sum_{k=1}^j e^{-t_{j-k}} (\hat{\mu}_k^{(m)} B - A) U_k^{(m)} - (\Delta t)^3 \sum_{k=1}^j \sum_{v=1}^k e^{-t_{j-k}} g_{k-v} B U_v^{(m)} + (\Delta t)^2 \sum_{k=1}^j e^{-t_{j-k}} \hat{F}^{(m)}(t_k) + \Delta t e^{-t_j} \tilde{U}_1, j = \overline{1, M-1}. \tag{3.21}$$

Quá trình tính toán $U_j^{(m)}, j = \overline{1, M}$ sẽ dừng lại nếu sai số giữa hai bước lặp liên tiếp thỏa mãn điều kiện

$$\|U^{(m)} - U^{(m-1)}\| = \max_{1 \leq j \leq M} \max_{1 \leq i \leq N} |u_i^{(m)}(t_j) - u_i^{(m-1)}(t_j)| < 10^{-4}. \tag{3.22}$$

Khi đó, sai số giữa nghiệm chính xác $u_{ex}(x, t)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x, t)$ được xác định bởi:

$$E_{N, M} = \max_{1 \leq j \leq M} \max_{1 \leq i \leq N} |u_{ex}(x_i, t_j) - u_i^{(m)}(t_j)|. \tag{3.23}$$

Đặc biệt, tại $x = 1/2$ ta có sai số nghiệm chính xác $u_{ex}(x, t)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x, t)$ được xác định bởi:

$$\tilde{E}_{N, M} = \max_{1 \leq j \leq M} \left| u_{ex}\left(\frac{1}{2}, t_j\right) - u^{(m)}\left(\frac{1}{2}, t_j\right) \right|. \tag{3.24}$$

IV. ĐÁNH GIÁ SAI SỐ VÀ MÔ PHỎNG NGHIỆM

A. ĐÁNH GIÁ SAI SỐ GIỮA NGHIỆM XẤP XỈ VÀ NGHIỆM CHÍNH XÁC

Để đánh giá sai số giữa nghiệm chính xác $u_{ex}(x, t)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x, t)$, chúng ta xét $x \in [0, 1], t \in [0, 0.3]$ và kích thước lưới sai phân cho bởi: $N \in \{10, 15, 20, 25, 30\}, M = N^2$. Khi đó, chúng ta có các đánh giá sai số như sau.

(i) Tại bước lặp $m = 5$, thuật toán (3.21) thỏa mãn điều kiện dừng quá trình tính toán được xác định bởi (3.22). Bảng 1 dưới đây mô tả sai số $E_{N, M}$ giữa nghiệm chính xác $u_{ex}(x, t)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x, t)$ theo các kích thước khác nhau của lưới sai phân. Số liệu trong Bảng 1 cho thấy sai số $E_{N, M}$ càng bé khi kích thước lưới sai phân tăng.

N	M	$E_{N, M}$	Thời gian (giây)
10	100	0.009353408405667	12.665546
15	225	0.004357095991122	32.787382
20	400	0.00256565099811	154.769058
25	625	0.001656190887705	570.135079
30	900	0.001169450443302	1662.583403

Bảng 1. Bảng sai số giữa nghiệm chính xác $u_{ex}(x, t)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x, t)$ theo các lưới sai phân khác nhau

(ii) Với lưới sai phân cố định $N = 30, M = N^2 = 900$, Bảng 2 dưới đây mô tả sai số giữa nghiệm chính xác $u_{ex}(x, t)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x, t)$ theo số bước lặp tăng dần. Số liệu trong Bảng 2 cho thấy sai số $E_{N, M}$ giảm theo sự

tăng lên một số bước lặp ban đầu $m \leq 5$ nhưng khi $m > 5$ thì sai số $E_{N,M}$ gần như không thay đổi theo sự gia tăng của số lần lặp. Điều này có thể lý giải là do chúng ta đang xét tại một lưới sai phân cố định.

m	$E_{N,M}$	Thời gian (giây)
1	0.023710878888528	344.380875
2	0.001598044180291	368.243016
3	0.001061337053305	367.358361
4	0.001166241837987	316.866741
5	0.001169450443302	327.378199
6	0.001169507520792	348.306363
7	0.001169508296348	348.693218
8	0.001169508305051	347.156139
9	0.001169508305128	357.757205
10	0.001169508305133	362.151965

Bảng 2. Bảng sai số giữa nghiệm chính xác $u_{ex}(x,t)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x,t)$ theo sự tăng dần của các bước lặp

(iii) Với lưới sai phân cố định $N=30, M=N^2=900$, Bảng 3 dưới đây mô tả sai số giữa nghiệm chính xác tại $x=\frac{1}{2}$ là $u_{ex}\left(\frac{1}{2},t\right)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}\left(\frac{1}{2},t\right)$ theo số bước lặp tăng dần. Quan sát số liệu trong Bảng 3, chúng ta có nhận xét tương tự của sai số $E_{N,M}$ rằng sai số $\tilde{E}_{N,M}$ giảm theo sự tăng lên một số bước lặp ban đầu và ổn định mặc dù gia tăng của số lần lặp.

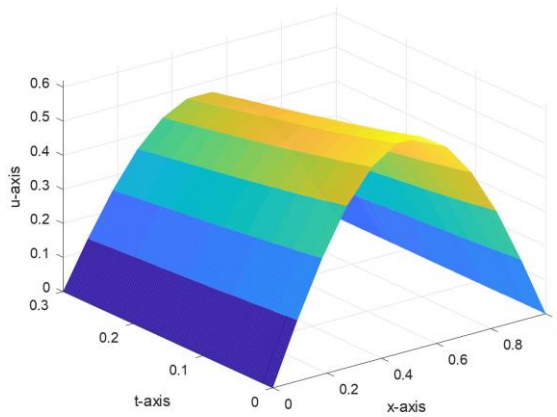
m	$E_{N,M}$	Thời gian (giây)
1	0.023710878888527	309.923591
2	0.001596676937749	312.484402
3	0.001047071048001	337.989763
4	0.001161188950922	330.923304
5	0.001164134899124	317.114394
6	0.001164186126866	323.985569
7	0.001164186811922	316.120956
8	0.001164186819514	323.19016
9	0.001164186819582	314.639495
10	0.001164186819586	315.033501

Bảng 3. Bảng sai số giữa nghiệm chính xác $u_{ex}\left(\frac{1}{2},t\right)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}\left(\frac{1}{2},t\right)$ theo sự tăng dần của các bước lặp

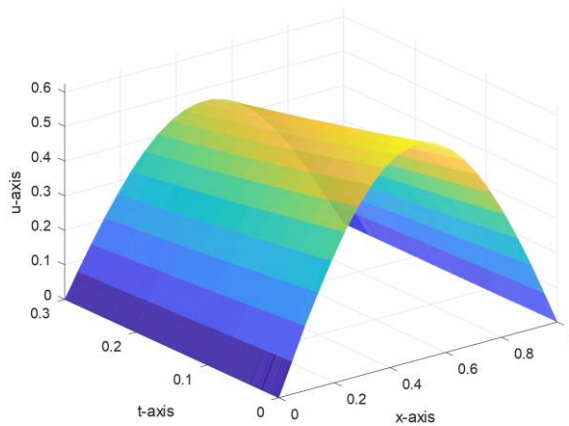
B. MÔ PHỎNG NGHIỆM XẤP XỈ VÀ NGHIỆM CHÍNH XÁC

Trong phần này, chúng ta sẽ vẽ hình mô phỏng nghiệm chính xác $u_{ex}(x,t)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x,t)$ theo các lưới sai phân khác nhau. Cụ thể, Hình 1 – Hình 3 mô phỏng hình 3D cho nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x,t)$ lần lượt theo các lưới sai phân $(N,M)=(10,100), (N,M)=(20,400), (N,M)=(30,900)$. Hình 4 là hình mô phỏng trong 3D cho

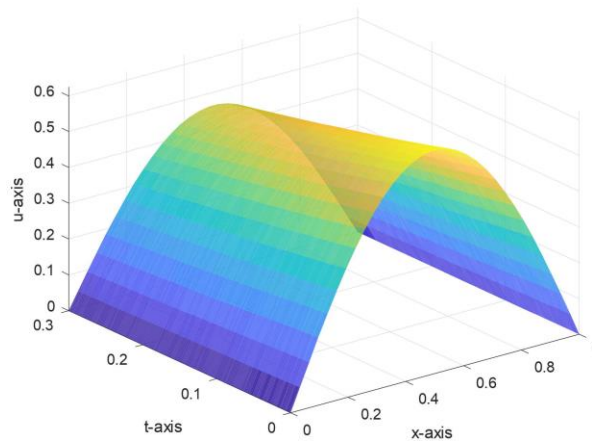
nghiệm chính xác $u_{ex}(x,t)$ ứng với lưới sai phân $(N,M) = (30,900)$. Hình 5 mô phỏng cho nghiệm chính xác $u_{ex}\left(\frac{1}{2},t\right)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}\left(\frac{1}{2},t\right)$ tại $x = \frac{1}{2}$ và ứng với lưới sai phân $(N,M) = (30,900)$.



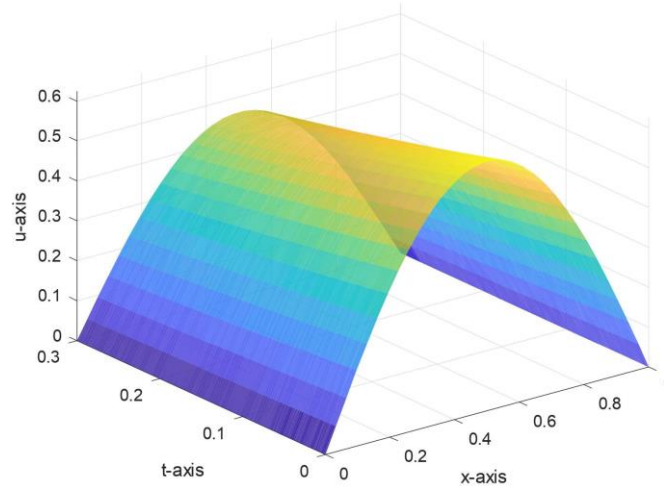
Hình 1. Nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x,t)$ ứng với $N = 10, M = 100$



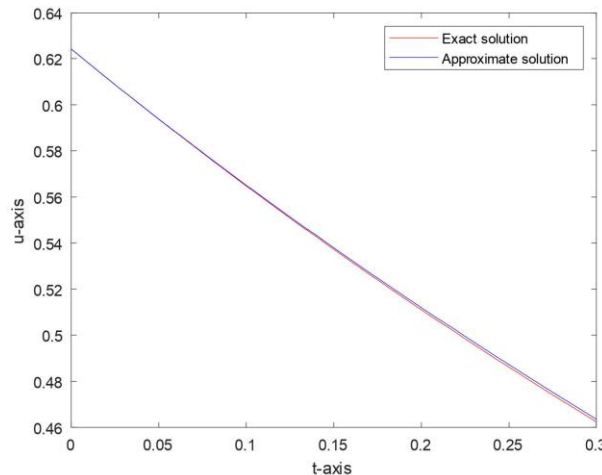
Hình 2. Nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x,t)$ ứng với $N = 20, M = 400$



Hình 3. Nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x,t)$ ứng với $N = 30, M = 900$



Hình 4. Nghiệm chính xác $u_{ex}(x, t)$ ứng với $N = 30, M = 900$



Hình 5. Nghiệm chính xác $u_{ex}\left(\frac{1}{2}, t\right)$ và nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}\left(\frac{1}{2}, t\right)$ tại $x = \frac{1}{2}$ ứng với $N = 30, M = 900$

Nhận xét. Hình 3 và Hình 4 là hình mô phỏng trong 3D của nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}(x, t)$ và nghiệm chính xác $u_{ex}(x, t)$ ứng với lưới sai phân $N = 30, M = 900$ (tại bước lặp $m = 5$). Do sai số $E_{N, M}$ trong trường hợp này có giá trị xấp xỉ 10^{-3} (xem số liệu dòng 6 – Bảng 1) nên 2 hình gần như giống nhau khi “nhìn bằng mắt thường”. Trong khi đó, Hình 5 là mô phỏng 2D của nghiệm xấp xỉ $u^{(m)}\left(\frac{1}{2}, t\right)$ và nghiệm chính xác $u_{ex}\left(\frac{1}{2}, t\right)$ tại $x = \frac{1}{2}$ với lưới sai phân $N = 30, M = 900$ chúng ta có thể nhận thấy “sự lệch nhau giữa hai đường cong”.

V. KẾT LUẬN

Bài báo này khảo sát một phương trình sóng phi tuyến chứa số hạng đạo hàm bậc bốn theo biến không gian. Trước tiên, phương pháp sai phân hữu hạn đã được sử dụng để xấp xỉ các đạo hàm theo biến không gian và thu được một hệ phương trình vi tích phân phi tuyến theo biến thời gian. Sau khi viết lại hệ phương trình vi tích phân dưới dạng phương trình vectơ, thực hiện việc tuyến tính hóa bởi một dãy xấp xỉ liên tiếp. Kế đến, một lần nữa phương pháp sai phân hữu hạn được sử dụng để xấp xỉ các đạo hàm theo biến thời gian, đồng thời các tích phân cũng được xấp xỉ bởi công thức hình thang. Từ đó, một thuật toán (công thức (3.21)) được thiết lập để tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán. Cuối cùng, bài báo cũng xây dựng các bảng số liệu đánh giá sai số của nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác, đồng thời trình bày một số hình vẽ mô phỏng trong 2D và 3D của nghiệm xấp xỉ và nghiệm

chính xác. Bài báo này chỉ tập trung vào mục tiêu chính là xây dựng một thuật toán bằng phương pháp sai phân hữu hạn để tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán mà không khảo sát các kết quả khác về tính chất của nghiệm bài toán, chẳng hạn tính bùng nổ, tính tắt dần, sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào các dữ kiện,... Các nghiên cứu tương lai của chúng tôi sẽ tập trung vào khảo sát các tính chất nghiệm của bài toán.

VI. LỜI CẢM ƠN

Tác giả chân thành cảm ơn Ban biên tập, các phản biện đã có những lời phê bình và ý kiến đóng góp có giá trị để các tác giả hoàn thiện bài báo.

Bài báo này được tài trợ bởi Quỹ phát triển Khoa học và Công nghệ Trường Đại học Ngoại ngữ và Tin học Thành phố Hồ Chí Minh. Mã số: H2023-05.

VII. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. Woinowsky-Krieger (1950), The effect of axial force on the vibration of hinged bars, *J. Appl. Mech.* Vol. 17, No. 4, pp.17-39.
- [2] J.M. Ball (1973), Stability theory for an extensible beam, *J. Differ. Equ.* Vol. 14, No. 3, pp.399-418.
- [3] W.E. Fitzgibbon (1990), Limiting behavior of the strongly damped extensible beam equation, *Differ. Integral Equ.* Vol. 3, No. 6, pp.1067-1076.
- [4] C. Giorgi, V. Pata, E. Vuk (2008), On the extensible viscoelastic beam, *Nonlinearity*, Vol. 21, No. 4: 713.
- [5] G. Liu, M. Yin, S. Xia (2023), Blow-up phenomena for a class of extensible beam equations, *Mediterr. J. Math.* Vol. 20: 266.
- [6] M.L. Liao, Q.W. Li (2023), Blow-up of solutions to the fourth-order equation with variable-exponent nonlinear weak damping, *Mediterr. J. Math.* Vol. 20: 179.
- [7] C. Lizama, M. Murillo-Arcila (2023), On the dynamics of the damped extensible beam 1D-equation, *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 522, No. 1: 126954.
- [8] V. Narciso, F. Ekinici, E. Piskin (2023), On a beam model with degenerate nonlocal nonlinear damping, *Evol. Equ. Control. Theory* Vol. 12 No. 2, pp.732-751.
- [9] C. Yang, V.D. Radulescu, R. Xu, M. Zhang (2022), Global well-posedness analysis for the nonlinear extensible beam equations in a class of modified Woinowsky-Krieger models, *Adv. Nonlinear Stud.* Vol. 22, No. 1, pp.436-468.
- [10] T. Achouri (2019), Conservative finite difference scheme for the nonlinear fourth-order wave equation, *Appl. Math. Comput.* Vol. 359, No. 5, pp.121-131.
- [11] K. Anaya, S.A. Messaoudi, K. Mustapha (2021), Decay rate of a weakly dissipative viscoelastic plate equation with infinite memory, *Arab. J. Math.* Vol. 10, No. 4, pp.31-39.
- [12] L.T.M. Thanh, T.T.M. Dung, N.H. Nhan, L.T.P. Ngoc, N.T. Long (2022), Numerical results for a fourth-order nonlinear wave equation of Kirchhoff type with a viscoelastic term, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* Vol. 38, No. 5, pp.1319-1344.
- [13] L.T.M. Thanh, L.T.P. Ngoc, N.H. Nhan, N.T. Long (2023), Finite-time blow up of solutions for a fourth-order viscoelastic wave equation with damping terms, *J. Appl. Anal. Comput.* Vol. 13, No. 6, pp. 3558-3591.

APPROXIMATE SOLUTION BY FINITE DIFFERENCE OF A WAVE EQUATION WITH FOURTH-ORDER DERIVATIVE TERM

Nguyen Huu Nhan, Le Thi Mai Thanh, Tran Trinh Manh Dung

ABSTRACT— This paper examines a nonlinear wave equation with a fourth-order derivative term. First, we state the results of the existence and uniqueness of the problem, which are proved by the Faedo-Galerkin method and several arguments of compactness. Next, we consider a special case of the original problem and utilize the finite difference method to construct an algorithm to find an approximate solution to the problem. In addition, we also establish some tables to estimate the error of the approximate solution and the exact one respectively iterative steps and sizes of differential mesh. Finally, we show some figures to illustrate the approximate solution and the exact solution with several various meshes.

Keywords— Finite difference, approximate solution, Faedo-Galerkin method, fourth-order nonlinear wave equation.



Nguyễn Hữu Nhân là Tiến sĩ toán, chuyên ngành Toán giải tích. Hiện tại TS. Nhân đang là giảng viên cơ hữu thuộc Khoa Công nghệ thông tin của Trường Đại học Ngoại ngữ-Tin học Thành phố Hồ Chí Minh. Lĩnh vực nghiên cứu chính là Toán Giải tích, hướng nghiên cứu Phương trình vi phân, Phương trình đạo hàm riêng.



Lê Thị Mai Thanh là Thạc sĩ toán, chuyên ngành Toán giải tích. Hiện tại ThS. Thanh đang là giảng viên cơ hữu thuộc Khoa Công nghệ thông tin của Trường Đại học Nguyễn Tất Thành. Lĩnh vực nghiên cứu chính là Toán giải tích, hướng nghiên cứu Phương trình vi phân, Phương trình đạo hàm riêng.



Trần Trịnh Mạnh Dũng là Thạc sĩ toán, chuyên ngành Toán giải tích. Hiện tại ThS. Dũng đang là giảng viên cơ hữu thuộc Khoa Công nghệ thông tin của Trường Đại học FPT. Lĩnh vực nghiên cứu chính là Toán giải tích, hướng nghiên cứu Phương trình vi phân, Phương trình đạo hàm riêng.