RESEARCH ARTICLE

ĐÁNH GIÁ TẮT DẦN TỔNG QUÁT VÀ BÙNG NỔ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH SÓNG ĐÀN HỒI NHỚT DẠNG KIRCHHOFF-CARRIER CHỨA SỐ HẠNG TẮT DẦN MẠNH TRONG MIỀN HÌNH VÀNH KHĂN

Lê Hữu Kỳ Sơn

Khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Công Thương TP. Hồ Chí Minh

sonlhk@huit.edu.vn

TÓM TẮT— Bài báo này nghiên cứu phương trình sóng kiểu Kirchhoff-Carrier trong miền hình vành khăn với số hạng tắt dần mạnh. Trước tiên, bằng cách áp dụng phương pháp xấp xỉ tuyến tính và phương pháp Faedo-Galerkin, cùng với phương pháp các đánh giá tiên nghiệm và compact, chúng tôi chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu cho bài toán được đề xuất. Sau đó, bằng cách xây dựng một phiếm hàm Lyapunov, chúng tôi trình bày kết quả bùng nổ của nghiệm với năng lượng ban đầu âm. Cuối cùng, chúng tôi thiết lập một điều kiện đủ để đảm bảo rằng bất kỳ nghiệm yếu toàn cục nào đều tắt dần tổng quát.

Từ khóa— Phương pháp Faedo-Galerkin, tắt dần tổng quát, bùng nổ, phương trình sóng đàn hồi nhớt, dạng Kirchhoff-Carrier.

I. GIỚI THIỆU

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát bài toán Dirichlet cho phương trình sóng đàn hồi nhớt kiểu Kirchhoff-Carrier trong miền hình vành khăn với số hạng tắt dần mạnh như sau:

$$u_{tt}-\mu(t,||u(t)||_0^2,||u_x(t)||_0^2)\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(xu_x)-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(xu_{tx})$$
$$+\int_0^t g(t-s)\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\big(xu_x(s)\big)ds=f(x,t,u,u_x,u_t),\ \rho<x<1, 0<t<T, \tag{1.1}$$

$$u(\rho,t)=u(1,t)=0, \tag{1.2}$$
$$u(x,0)=\tilde{u}_0(x), u_t(x,0)=\tilde{u}_1(x), \tag{1.3}$$

với $\rho\in(0,1)$ là một hằng số cho trước và $\mu,g,f,\tilde{u}_0,\tilde{u}_1$ là các hàm cho trước thỏa các điều kiện ta sẽ chỉ ra sau.

Trong phương trình (1.1), số hạng phi tuyến $\mu(t,\|u(t)\|_0^2,\|u_x(t)\|_0^2)$ phụ thuộc vào các tích phân.

$$\|u(t)\|_0^2=\int_\rho^1 xu^2(x,t)dx\,,\|u_x(t)\|_0^2=\int_\rho^1 xu_x^2(x,t)dx. \tag{1.4}$$

Bài toán (1.1)-(1.2) mô tả dao động sóng phi tuyến hai chiều trên hình vành khăn $\Omega=(x,y):\rho^2<x^2+y^2<1$. Khi dao động diễn ra, diện tích màng và lực căng tại mỗi điểm trên màng thay đổi theo thời gian. Điều kiện biên $u(\rho,t)=u(1,t)=0$ nghĩa là tại các biên $\Gamma_\rho=\{(x,y):x^2+y^2=\rho^2\}$ và $\Gamma_1=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ của hình vành khăn được được gắn chặt cố định.

Các phương trình Kirchhoff-Carrier có dạng (1.1) nhận được nhiều sự quan tâm. Có thể kể đến các công trình như: Cavalcanti [1, 2] cùng các cộng sự, đã nghiên cứu sự tồn tại và tắt dần đa thức của nghiệm phương trình có dạng Kirchhoff-Carrier.

Trong [3], Gongwei Liu đã nghiên cứu phương trình sóng dạng Kirchhoff-Carrier với điều kiện đầu và biên Dirichlet:

$$\begin{cases}u_{tt}(x,t)-M(\|\nabla u(t)\|^2)\Delta u(x,t)+u_t(x,t)=g(u(x,t)),(x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega,\\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\end{cases}$$

với Ω là miền bị chặn có biên $\partial\Omega$ đủ trơn. Với một số điều kiện về hàm M,g cùng các dữ kiện đầu, tác giả đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm toàn cục và tính tắt dần của nghiệm cũng như tính bùng nổ của nghiệm tại thời gian hữu hạn.

Trong [4], Cordeiro và các cộng sự đã khảo sát sự tồn tại và tắt dần mũ của nghiệm toàn cục của phương trình Klein-Gordon dạng Kirchhoff-Carrier với số hạng tắt dần mạnh $-\Delta u_t$ và số hạng nguồn logarit u $ln|\mathrm{u}|_R^2$. Các tác giả đã dùng kỹ thuật "potential well" ứng với số hạng logarit phi tuyến và kết quả về nghiệm toàn cục cũng như tính tắt dần mũ dựa trên điều kiện các dữ kiện đầu trong tập ổn định từ đa tạp Nehari.

Một số kết quả về sự tồn tại nghiệm địa phương, nghiệm toàn cục, khai triển tiệm cận, dáng điệu tiệm cận, tính chất tắt dần và bùng nổ của nghiệm, cũng được khảo sát như trong các công trình Larkin [5], Long [6,7,8] và các cộng sự, Messaoudi [9], Ngọc [10] và các cộng sự.

Từ các công trình trên, trong bài báo này, chúng tôi khảo sát sự tồn tại, tính tắt dần tổng quát và tính bùng nổ của nghiệm bài toán (1.1)-(1.3) với các điều kiện thích hợp của các hàm μ, g, f và các dữ kiện đầu. Trong phần 2 tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu một số ký hiệu, định nghĩa các không gian hàm và một số bổ đề cần thiết. Trong phần 3, chúng tôi sẽ trình bày kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm địa phương của bài toán (1.1)-(1.3). Trong phần 4 và 5, chúng tôi lần lượt xét các trường hợp riêng của bài toán (1.1)-(1.3) và thu được tính bùng nổ và tắt dần tổng quát của nghiệm thông qua việc xây dựng phiếm hàm Lyapunov phù hợp.

II. CÔNG CỤ

Trước tiên, ta đặt $\Omega = (\rho, 1)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $0 < \rho < 1$, $T > 0$ và ký hiệu các không gian hàm thông thường trong toàn bộ bài báo như sau: $C^m \equiv C^m(\overline{\Omega})$, $L^p \equiv L^p(\Omega)$, $H^m \equiv H^m(\Omega)$, $W^{m,p} \equiv W^{m,p}(\Omega)$.

Chú ý rằng, các không gian L^2, H^1, H^2 là các không gian Hilbert ứng với các tích vô hướng sau

$$\langle u, v\rangle = \int_\rho^1 x u(x) v(x) dx,\ \langle u, v\rangle + \langle u_x, v_x\rangle,$$

$$\langle u, v\rangle + \langle u_x, v_x\rangle + \langle u_{xx}, v_{xx}\rangle. \tag{2.1}$$

Ta ký hiệu các chuẩn trong L^2, H^1 và H^2được sinh ra bởi các tích vô hướng tương ứng trong (2.1) là $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$.

Ta có bổ đề về phép nhúng giữa các không gian hàm như sau.

Bổ đề 2.1. Phép nhúng $H_0^1 \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ là compact và với mọi $v \in H_0^1$, ta có:

(i) $\|v\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \sqrt{1-\rho}\|v_x\|$,

(ii) $\|v\| \leq \frac{1-\rho}{\sqrt{2}}\|v_x\|$,

(iii) $\|v\|_0 \leq \frac{1-\rho}{\sqrt{2\rho}}\|v_x\|_0$.

Ta ký hiệu $\|\cdot\|_X$ là chuẩn của không gian Banach X và gọi X' là đối ngẫu của X. Không gian $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, là không gian Banach các hàm thực $u: (0, T) \to X$ đo được và thỏa $\|u\|_{L^p(0,T;X)} < \infty$, trong đó:

$$\|u\|_{L^p(0,t;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\, dt\right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty, \\ \underset{0<t<T}{esssup}\|u(t)\|_X \quad, p = \infty. \end{cases}$$

Với một hàm hai biến $u(x, t)$, chúng tôi sử dụng các kí hiệu $u(t)$, $u_t(t) = \dot{u}(t)$, $u_{tt}(t) = \ddot{u}(t)$, $u_x(t) = \nabla u(t)$, $u_{xx}(t) = \Delta u(t)$ thay cho $u(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$.

III. SỰ TỒN TẠI VÀ TÍNH DUY NHẤT CỦA NGHIỆM YẾU

Định nghĩa 3.1. Nghiệm yếu của bài toán (1.1)-(1.3) là một hàm $u \in L^\infty(0, T; H^2 \cap H_0^1)$, $u' \in L^\infty(0, T; H^2 \cap H_0^1)$, $u'' \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H_0^1)$ thỏa mãn bài toán biến phân.

$$\langle u''(t), v\rangle + \mu[u](t)\langle u_x(t), v_x\rangle + \langle u_{xt}(t), v_x\rangle = \int_0^t g(t-s)\langle u_x(s), v_x\rangle ds + \langle f[u](t), v\rangle, \tag{3.1}$$

với mọi $v \in H_0^1$, hầu hết $t \in (0, T)$ và điều kiện đầu.

$$u(0) = \tilde{u}_0, u'(0) = \tilde{u}_1, \tag{3.2}$$

với

$$f[u](x, t) = f\big(x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t)\big), \mu[u](t) = \mu(t, \|u(t)\|_0^2, \|u_x(t)\|_0^2). \tag{3.3}$$

Cho $T^* > 0$ cố định, để khảo sát sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán (1.1)-(1.3), ta cần các giả thiết sau:

(A_1): $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1 \in H^2 \cap H_0^1$;
(A_2): $\mu \in C^1([0, T^*], \mathbb{R}_+^2)$ và $\exists \mu_* > 0$: $\mu(t, y, z) \geq \mu_*, \forall (t, y, z) \in [0, T^*] \times \mathbb{R}_+^2$;
(A_3): $g \in C^1([0, T^*])$;
(A_4): $f \in C^1([\rho, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R}^3)$: $f(\rho, t, 0, y, 0) = f(1, t, 0, y, 0) = 0, \forall (t, y) \in [0, T^*] \times \mathbb{R}$.

Khi đó, ta có định lí về sự tồn tại duy nhất nghiệm sau:

Định lý 3.2. Giả sử các giả thiết $(A_1)-(A_4)$ thỏa. Khi đó, tồn tại một hằng số $T \in (0, T^*]$ sao cho bài toán (1.1)-(1.3) có duy nhất nghiệm yếu $u \in L^\infty(0,T;H^2\cap H_0^1)\cap C([0,T];H^2\cap H_0^1)\cap C^1([0,T];H_0^1)$, sao cho $u' \in L^\infty(0,T;H^2\cap H_0^1)\cap C([0,T];H_0^1)$ và $u'' \in L^\infty(0,T;L^2)\cap L^2(0,T;H_0^1)$.

IV. TÍNH BÙNG NỔ CỦA NGHIỆM

Trong phần này, ta khảo sát tính bùng nổ của nghiệm bài toán (1.1)-(1.3) với $\mu \equiv \mu(\|u_x(t)\|_0^2)$, $f \equiv -\lambda u_t + f(u)$. Khi đó bài toán (1.1)-(1.3) trở thành:

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu(\|u_x(t)\|_0^2)\left(u_{xx}+\frac{1}{x}u_x\right) - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(xu_{xt}) \\ \qquad + \int_0^t g(t-s)\left(u_{xx}(s)+\frac{1}{x}u_x(s)\right)ds \\ \qquad +\lambda u_t = f(u),\ \rho<x<1,\ 0<t<T, \\ u(\rho,t)=u(1,t)=0, \\ u(x,0)=\tilde{u}_0(x), u_t(x,0)=\tilde{u}_1(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

với $0<\rho<1$, $\lambda>0$ là các hằng số cho trước; f, g, $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ là các hàm cho trước mà điều kiện của nó ta sẽ chỉ ra sau đây:

$(\overline{A}_2)$: $\mu \in C^1(\mathbb{R}_+)$ và tồn tại các hằng số $\mu_*>0$, $\mu_1>0$ sao cho $\mu(z)\ge\mu_*, z\mu(z)\le\mu_1\int_0^z\mu(y)dy, \forall z\ge 0$.

$(\overline{A}_3)$: $f\in C^1(\mathbb{R}), f(0)=0$ và tồn tại các hằng số dương $p>2, d_1>max\{2,2\mu_1\}, \overline{d}_1>2$ sao cho:

(i) $yf(y)\ge d_1\int_0^y f(z)dz, \forall y\in\mathbb{R}$,

(ii) $\int_0^y f(z)dz \ge \bar{d}_1|y|^p, \forall y\in\mathbb{R}$;

$(\overline{A}_4)$: $g\in H^1(\mathbb{R}_+)\cap L^1(\mathbb{R}_+)$ và

(i) $g'(t)\le 0<g(t), \forall t\ge 0$,

(ii) $0<\int_0^\infty g(s)ds<\mu_*\left(1-\frac{2\mu_1}{d_1}\right)$.

Định lý 4.1: Giả sử $\tilde{u}_0,\tilde{u}_1\in H^2\cap H_0^1$, và các giả thiết $(\bar{A}_2)-(\bar{A}_4)$ thỏa. Khi đó, bài toán (4.1) có duy nhất nghiệm yếu $u\in L^\infty(0,T;H^2\cap H_0^1)\cap C([0,T];H^2\cap H_0^1)\cap C^1([0,T];H_0^1)$ sao cho $u'\in L^\infty(0,T;H^2\cap H_0^1)\cap C([0,T];H_0^1)$ và $u''\in L^\infty(0,T;L^2)\cap L^2(0,T;H_0^1)$, với $T>0$ đủ nhỏ.

Ta xét phiếm hàm năng lượng ứng với bài toán (4.1) như sau:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u'(t)\|_0^2 + \frac{1}{2}(g*u)(t) - \int_\rho^1 xdx\int_0^{u(x,t)} f(z)dz \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\int_0^{\|u_x(t)\|_0^2}\mu(z)dz - \|u_x(t)\|_0^2\int_0^t g(s)ds\right), \end{aligned} \tag{4.2}$$

trong đó $(g*u)(t)=\int_0^t g(t-s)\|u_x(s)-u_x(t)\|_0^2ds$.

Nhân hai vế phương trình $(4.1)_1$ cho $xu'(x,t)$, và lấy tích phân trên khoảng $(\rho,1)$ theo biến x, ta được:

$$E'(t) = -\|u_x'(t)\|_0^2 - \lambda\|u'(t)\|_0^2 + \frac{1}{2}(g'*u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|u_x(t)\|_0^2 \le 0. \tag{4.3}$$

Ta có định lý về tính bùng nổ của nghiệm như sau:

Định lý 4.2. Giả sử các giả thiết $(\bar{A}_2)-(\bar{A}_4)$ thỏa và $\tilde{u}_0,\tilde{u}_1\in H^2\cap H_0^1$ sao cho $E(0)<0$. Khi đó, nghiệm yếu của bài toán (4.1) bùng nổ trong thời gian hữu hạn.

Chứng minh Định lí 4.2: Chứng minh bao gồm hai bước.

Bước 1. Trước tiên, ta chứng minh bài toán (4.1) không có nghiệm yếu toàn cục. Thật vậy, giả sử bài toán (4.1) có nghiệm toàn cục u thỏa:

$$u\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+;H^2\cap H_0^1)\cap C(\mathbb{R}_+;H^2\cap H_0^1)\cap C^1(\mathbb{R}_+;H_0^1),$$
$$u'\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+;H^2\cap H_0^1)\cap C(\mathbb{R}_+;H_0^1),$$
$$u''\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+;L^2)\cap L_{loc}^2(\mathbb{R}_+;H_0^1)$$

là nghiệm toàn cục của bài toán (4.1). Ta đặt $H(t)=-E(t), \forall t\ge 0$. Từ (4.3), ta có $H'(t)>0$, suy ra:

$$\begin{aligned} 0 < H(0) \leq H(t) &\leq \tfrac{1}{2}\|u'(t)\|_0^2 + \tfrac{1}{2}(g * u)(t) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\int_0^{\|u_x(t)\|_0^2} \mu(z)dz - \|u_x(t)\|_0^2 \int_0^t g(s)ds\right) \\ &+ \int_\rho^1 xdx \int_0^{u(x,t)} f(z)dz \leq 2\int_\rho^1 xdx \int_0^{u(x,t)} f(z)dz. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ta định nghĩa phiếm hàm

$$L(t) = H^{1-\eta}(t) + \varepsilon \Phi(t), \tag{4.5}$$

với ε đủ nhỏ và

$$0 < 2\eta < 1,\ \tfrac{2}{1-2\eta} \leq p, \tag{4.6}$$

$$\Phi(t) = \langle u'(t), u(t)\rangle + \tfrac{1}{2}\|u_x(t)\|_0^2 + \tfrac{\lambda}{2}\|u(t)\|_0^2. \tag{4.7}$$

Bổ đề 4.3. Giả sử $(\bar{A}_2) - (\bar{A}_4)$ thỏa và các dữ kiện đầu $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1 \in H^2 \cap H_0^1$ sao cho $E(0) < 0$. Khi đó, tồn tại một hằng số $l_1 > 0$ sao cho:

$$L'(t) \geq l_1\left[H(t) + \|u'(t)\|_0^2 + \|u_x(t)\|_0^2 + \|u(t)\|_{L^p}^p\right]. \tag{4.8}$$

Chứng minh Bổ đề 4.3. Nhân hai vế của phương trình $(4.1)_1$ cho $xu(x,t)$, và lấy tích phân trên khoảng $(\rho, 1)$ theo biến x, ta được:

$$\Phi'(t) = \|u'(t)\|_0^2 - \mu(\|u_x(t)\|_0^2)\|u_x(t)\|_0^2 + \int_0^t g(t-s)\langle u_x(s), u_x(t)\rangle ds + \langle f(u), u\rangle. \tag{4.9}$$

Từ (4.5), lấy đạo hàm theo biến t hai vế ta được:

$$L'(t) = (1-\eta)H^{-\eta}(t)H'(t) + \varepsilon\Phi'(t) \geq \varepsilon\Phi'(t). \tag{4.10}$$

Từ các giả thiết $(\overline{A}_2), (\overline{A}_3)$, ta có các đánh giá sau:

$$\begin{cases} \mu(\|u_x(t)\|_0^2)\|u_x(t)\|_0^2 \leq \mu_1 \int_0^{\|u_x(t)\|_0^2} \mu(y)dy, \\ \langle f(u(t)), u(t)\rangle \geq d_1 \int_\rho^1 xdx \int_0^{u(x,t)} f(z)dz, \\ \int_\rho^1 xdx \int_0^{u(x,t)} f(z)dz \geq \overline{d}_1 \rho \|u(t)\|_{L^p}^p, \\ \int_0^t g(t-s)\langle u_x(s), u_x(t)\rangle ds \geq -\frac{1}{4}(g * u)(t). \end{cases} \tag{4.11}$$

Do đó, kết hợp (4.9) và (4.11), ta có:

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \|u'(t)\|_0^2 - \mu(\|u_x(t)\|_0^2)\|u_x(t)\|_0^2 + \int_0^t g(t-s)\langle u_x(s), u_x(t)\rangle ds + \langle f(u), u\rangle \\ &\geq \|u'(t)\|_0^2 - \mu_1 \int_0^{\|u_x(t)\|_0^2} \mu(y)dy + d_1 \int_\rho^1 xdx \int_0^{u(x,t)} f(z)dz - \frac{1}{4}(g * u)(t) \\ &= \|u'(t)\|_0^2 - \mu_1 \int_0^{\|u_x(t)\|_0^2} \mu(y)dy - \frac{1}{4}(g * u)(t) + d_1\delta_1 \int_\rho^1 xdx \int_0^{u(x,t)} f(z)dz \\ &\quad + d_1(1-\delta_1) \int_\rho^1 xdx \int_0^{u(x,t)} f(z)dz \\ &\geq \left(1 - \frac{d_1}{2}(1-\delta_1)\right)\|u'(t)\|_0^2 + d_1(1-\delta_1)H(t) \\ &+ \left(\frac{d_1}{2}(1-\delta_1) - \mu_1\right)\int_0^{\|u_x(t)\|_0^2} \mu(y)dy \\ &+ d_1\delta_1 \int_\rho^1 xdx \int_0^{u(x,t)} f(z)dz + \frac{1}{2}\left(d_1 - \frac{1}{2} - d_1\delta_1\right)(g * u)(t) \\ &- \frac{d_1}{2}(1-\delta_1)\|u_x(t)\|_0^2 \int_0^t g(s)ds \\ &\geq d_1(1-\delta_1)H(t) + \left(1 - \frac{d_1}{2}(1-\delta_1)\right)\|u'(t)\|_0^2 + d_1\delta_1\bar{d}_1\rho\|u(t)\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left(d_1-\frac{1}{2}-d_1\delta_1\right)(g*u)(t)$$
$$+\left(\frac{d_1}{2}(1-\delta_1)-\mu_1\right)\int_0^{\|u_x(t)\|_0^2}\mu(y)dy-\frac{d_1}{2}(1-\delta_1)\|u_x(t)\|_0^2\int_0^t g(s)ds$$
$$\geq d_1(1-\delta_1)H(t)+\left(1-\frac{d_1}{2}(1-\delta_1)\right)\|u'(t)\|_0^2+d_1\delta_1\bar{d}_1\rho\|u(t)\|_{L^p}^p$$
$$+\frac{1}{2}\left(d_1-\frac{1}{2}-d_1\delta_1\right)(g*u)(t)$$
$$+\frac{1}{2}\left[(d_1-d_1\delta_1-2\mu_1)\mu_*-d_1(1-\delta_1)\int_0^\infty g(t)dt\right]\|u_x(t)\|_0^2$$
$$\geq d_1(1-\delta_1)H(t)+\left(1-\frac{d_1}{2}(1-\delta_1)\right)\|u'(t)\|_0^2$$
$$+d_1\delta_1\bar{d}_1\rho\|u(t)\|_{L^p}^p+\frac{1}{2}\left(d_1-\frac{1}{2}-d_1\delta_1\right)(g*u)(t)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[(d_1-2\mu_1)\mu_*-d_1\int_0^\infty g(t)dt-d_1\delta_1\left(\mu_*-\int_0^\infty g(t)dt\right)\right]\|u_x(t)\|_0^2. \quad (4.12)$$

Do $d_1>max\{2,2\mu_1\}$ và $(d_1-2\mu_1)\mu_*-d_1\int_0^\infty g(t)dt>0$, ta có thể chọn $\delta_1\in(0,1)$ sao cho:

$$d_1-\tfrac{1}{2}-d_1\delta_1>0, \quad (4.13)$$

và

$$(d_1-2\mu_1)\mu_*-d_1\int_0^\infty g(t)dt-d_1\delta_1\left(\mu_*-\int_0^\infty g(t)dt\right)>0. \quad (4.14)$$

Từ các bất đẳng thức (4.10), (4.12) và (4.14), ta thu được (4.8) với $l_1>0$ đủ nhỏ. ■

Theo công thức $L(t)$ và (4.8), ta có thể chọn $\varepsilon>0$ đủ nhỏ sao cho:

$$L(t)\geq L(0)>0,\forall t\geq 0. \quad (4.15)$$

Sử dụng bất đẳng thức:

$$\left(\textstyle\sum_{i=1}^4 x_i\right)^r\leq 4^{r-1}\textstyle\sum_{i=1}^4 x_i^r,\forall r>1,x_1,\cdots,x_4\geq 0,$$

và từ (4.5) và (4.7), ta thu được:

$$L^{1/(1-\eta)}(t)\leq Const\left[H(t)+|\langle u'(t),u(t)\rangle|^{1/(1-\eta)}+\|u_x(t)\|_0^{2/(1-\eta)}+\|u(t)\|_0^{2/(1-\eta)}\right]. \quad (4.16)$$

Sử dụng bất đẳng thức Young, ta được:

$$|\langle u'(t),u(t)\rangle|^{1/(1-\eta)}\leq Const[\|u_x(t)\|_{L^p}^s+\|u'(t)\|_0^2], \quad (4.17)$$

với $s=2/(1-2\eta)\leq p$.

Tiếp theo ta có bổ đề.

Bổ đề 4.4. Với $s=2/(1-2\eta)\leq p$, ta có:

$$\|v\|_{L^p}^s+\|v\|_0^{2/(1-2\eta)}\leq\tfrac{2}{\rho}\left(\|v_x\|_0^2+\|v\|_{L^p}^p\right),\forall v\in H_0^1. \quad (4.18)$$

Từ (4.16) - (4.18), ta suy ra:

$$L^{1/(1-\eta)}(t)\leq Const\left[H(t)+\|u'(t)\|_0^2+\|u_x(t)\|_0^2+\|u(t)\|_{L^p}^p\right],\forall t\geq 0. \quad (4.19)$$

Hơn nữa, từ (4.8) và (4.19), ta có:

$$L'(t)\geq l_2L^{1/(1-\eta)}(t),\forall t\geq 0, \quad (4.20)$$

với l_2 là một hằng số dương.

Lấy tích phân (4.20) trên $(0,t)$, ta được:

$$L^{\eta/(1-\eta)}(t)\geq\frac{1}{L^{-\eta/(1-\eta)}(0)-\frac{l_2\eta}{1-\eta}t},0\leq t<\frac{1}{l_2\eta}(1-\eta)L^{-\eta/(1-\eta)}\equiv T_*. \quad (4.21)$$

Do đó, $L(t)\to\infty$ khi $t\to T_*^-$. Nên bài toán (4.1) không có nghiệm yếu toàn cục.

Bước 2. Tiếp theo, ta đặt $T_\infty = sup\,\{T > 0$: bài toán (4.1) có nghiệm yếu thỏa Định lý 4.1$\}$.

Do bài toán (4.1) không có nghiệm toàn cục nên ta có $T_\infty < \infty$. Ta sẽ chứng minh rằng:

$$\lim_{t\to T_\infty^-}\left(\|u(t)\|_{H^2\cap H_0^1} + \|u'(t)\|_{H^2\cap H_0^1}\right) = \infty. \tag{4.22}$$

Thật vậy, giả sử (4.22) không đúng, thì tồn tại một hằng số $M > 0$ và tồn tại một dãy t_m với $\{t_m\} \subset (0, T_\infty)$, $t_m \to T_\infty^-$ sao cho:

$$\|u(t_m)\|_{H^2\cap H_0^1} + \|u'(t_m)\|_{H^2\cap H_0^1} \le M,\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Theo các lập luận trên, với mỗi $m \in \mathbb{N}$, ta có $\left(u(t_m), u'(t_m)\right) \in (H^2 \cap H_0^1)^2$ và do đó Bài toán (4.1) với điều kiện đầu $u_*(t_m) = u(t_m)$, $u_*'(t_m) = u'(t_m)$, tồn tại duy nhất nghiệm yếu.

$$u_* \in C([t_m, t_m+\sigma]; H^2\cap H_0^1) \cap C^1([t_m, t_m+\sigma]; H_0^1)$$
$$u_*' \in L^\infty(t_m, t_m+\sigma; H^2\cap H_0^1) \cap C([t_m, t_m+\sigma]; H_0^1),$$
$$u_*'' \in L^\infty(t_m, t_m+\sigma; L^2) \cap L^2\ (t_m, t_m+\sigma; H_0^1),$$

trong đó σ độc lập với $m \in \mathbb{N}$. Do $t_m \to T_\infty^-$, ta có một $m \in \mathbb{N}$ sao cho $t_m + \sigma > T_\infty$. Khi đó hàm $\tilde{u}$ được định nghĩa bởi:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t),\ \ 0 \le t \le t_m, \\ u_*(t),\ t_m \le t \le t_m + \sigma, \end{cases}$$

là nghiệm yếu của bài toán (4.1) trên $[0, t_m+\sigma]$, và $t_m + \sigma > T_\infty$, ta có điều vô lý với định nghĩa T_∞. Vậy (4.22) đúng. ■

V. ĐÁNH GIÁ TẮT DẦN TỔNG QUÁT CỦA NGHIỆM

Trong phần này, ta khảo sát một trường hợp riêng của bài toán (1.1)-(1.3) như sau:

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu(\|u_x(t)\|_0^2)\left(u_{xx} + \frac{1}{x}u_x\right) - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(xu_{xt}) + \int_0^t g(t-s)\left(u_{xx}(s) + \frac{1}{x}u_x(s)\right)ds \\ \qquad\qquad + \lambda u_t = f(u) + F(x,t),\ \rho < x < 1,\ t \ge 0, \\ u(\rho,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases} \tag{5.1}$$

Trước tiên, ta đặt các điều kiện:

(A_1): $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1 \in H^2 \cap H_0^1$;
$(\tilde{A}_2)$: $\mu \in C^1(\mathbb{R}_+)$ và tồn tại các hằng số $\mu_* > 0$, sao cho $\mu(z) \ge \mu_*, \forall z \ge 0$;
$(\tilde{A}_3)$: $f \in C^1(\mathbb{R}), f(0) = 0$;
$(\tilde{A}_4)$: $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$;
$(\tilde{A}_5)$: $F \in C^1([\rho,1] \times \mathbb{R}_+)$.
Khi đó, ta có định lý về sự tồn tại nghiệm.

Định lý 5.1. Giả sử (A_1), $(\tilde{A}_2) - (\tilde{A}_5)$ thỏa và $\lambda > 0$. Khi đó bài toán (5.1) có duy nhất một nghiệm yếu địa phương u sao cho:

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(0,T; H^2\cap H_0^1) \cap C([0,T]; H^2\cap H_0^1) \cap C^1([0,T]; H_0^1), \\ &u' \in L^\infty(0,T; H^2\cap H_0^1) \cap C([0,T]; H_0^1), \\ &u'' \in L^\infty(0,T; L^2) \cap L^2(0,T; H_0^1), \end{aligned}$$

với $T > 0$ đủ nhỏ.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng nếu $\int_0^{\|\tilde{u}_{0x}\|_0^2}\mu(z)dz - p\int_\rho^1 xdx\int_0^{\tilde{u}_0(x)} f(z)dz > 0$ và năng lượng đầu

$$E(0) = \frac{1}{2}\|\tilde{u}_1\|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^{\|\tilde{u}_{0x}\|_0^2}\mu(z)dz - \int_\rho^1 xdx\int_0^{\tilde{u}_0(x)} f(z)dz$$

và F là đủ nhỏ, thì mọi nghiệm toàn cục đều tắt dần tổng quát khi $t \to +\infty$.

Ta xây dựng phiếm hàm Lyapunov:

$$L(t) = E(t) + \delta\Psi(t), \tag{5.2}$$

với $\delta > 0$,

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u'(t)\|_0^2 + \frac{1}{2}(g * u)(t) - \int_\rho^1 xdx \int_0^{u(x,t)} f(z)dz + \frac{1}{2}\left(\int_0^{\|u_x(t)\|_0^2} \mu(z)dz - \bar{g}(t)\|u_x(t)\|_0^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\|u'(t)\|_0^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left((g * u)(t) + \int_0^{\|u_x(t)\|_0^2} \mu(z)dz - \bar{g}(t)\|u_x(t)\|_0^2\right) + \frac{1}{p}I(t), \tag{5.3}$$

$$\Psi(t) = \langle u'(t), u(t)\rangle + \frac{1}{2}\|u_x(t)\|_0^2 + \frac{\lambda}{2}\|u(t)\|_0^2, \tag{5.4}$$

và

$$I(t) = (g * u)(t) + \int_0^{\|u_x(t)\|_0^2} \mu(z)dz - \bar{g}(t)\|u_x(t)\|_0^2 - p\int_\rho^1 xdx \int_0^{u(x,t)} f(z)dz. \tag{5.5}$$

Để thu được kết quả tắt dần, ta cần thêm các giả thiết sau:

(H_3): $f \in C^1(\mathbb{R}), f(0) = 0$ và tồn tại các hằng số $\alpha, \beta > 2$; $d_2, \bar{d}_2 > 0$, sao cho

(i) $yf(y) \le d_2 \int_0^y f(z)dz, \forall y \in \mathbb{R}$,

(ii) $\int_0^y f(z)dz \le \bar{d}_2(|y|^\alpha + |y|^\beta), \forall y \in \mathbb{R}$;

(H_4): $g \in C^1(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R})$ sao cho:

(i) $L_* = \mu_* - \bar{g}(\infty) > 0$,

(ii) Tồn tại một hàm $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+)$ sao cho:

(j) $\xi'(t) \le 0 < \xi(t), \forall t \ge 0, \int_0^\infty \xi(t)dt = \infty$,

(jj) $g'(t) \le -\xi(t)g(t) < 0, \forall t \ge 0$ với $\bar{g}(t) = \int_0^t g(s)ds$ và $\bar{g}(\infty) = \int_0^\infty g(s)ds$;

(H_5): $F \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2) \cap L^1(\mathbb{R}_+; L^2)$ và tồn tại các hằng số dương C_0, γ_0 sao cho:

$$\|F(t)\|_0^2 \le C_0\, exp(-\gamma_0 t), \forall t \ge 0;$$

(H_6): $p > d_1$.

Ta có bổ đề đánh giá phiếm hàm $E'(t)$ sau.

Bổ đề 5.2. Với mọi $\varepsilon_1 > 0$, ta có:

(i) $E'(t) \le \frac{1}{2}\|F(t)\|_0 + \frac{1}{2}\|F(t)\|_0\|u'(t)\|_0^2$,

(ii) $E'(t) \le -\|u_x'(t)\|_0^2 - \left(\lambda - \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\|u'(t)\|_0^2 - \frac{1}{2}\xi(t)(g * u)(t) + \frac{1}{2\varepsilon_1}\|F(t)\|_0^2$.

Chứng minh. Nhân phương trình $(5.1)_1$ bởi $xu'(x,t)$, và lấy tích phân trên $[\rho, 1]$, ta thu được:

$$E'(t) = -\|u_x'(t)\|_0^2 - \lambda\|u'(t)\|_0^2 + \frac{1}{2}(g' * u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|u_x(t)\|_0^2 + \langle F(t), u'(t)\rangle. \tag{5.6}$$

Từ điều kiện (H_4) và (5.6), ta thu được (i)

$$E'(t) \le |\langle F(t), u'(t)\rangle| \le \|F(t)\|_0\|u'(t)\|_0 \le \frac{1}{2}(\|F(t)\|_0 + \|F(t)\|_0\|u'(t)\|_0^2).$$

Từ giả thiết (5.6), ta có $(g' * u)(t) \le -\xi(t)(g * u)(t)$, nên:

$$E'(t) \le -\|u_x'(t)\|_0^2 - \lambda\|u'(t)\|_0^2 - \frac{1}{2}\xi(t)(g * u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|u_x(t)\|_0^2 + \|F(t)\|_0\|u'(t)\|_0$$

$$\le -\|u_x'(t)\|_0^2 - \left(\lambda - \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\|u'(t)\|_0^2 - \frac{1}{2}\xi(t)(g * u)(t) + \frac{1}{2\varepsilon_1}\|F(t)\|_0^2.$$

Bổ đề 5.2 được chứng minh. ■

Bổ đề 5.3. Giả sử $(\tilde{A}_2)$, $(H_3) - (H_6)$ thỏa và $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1 \in H^2 \cap H_0^1$ sao cho $I(0) > 0$ và

$$\eta^* := L_* - p\bar{d}_2(1-\rho)\left(\sqrt{\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^\alpha} R_*^{\alpha-2} + \sqrt{\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^\beta} R_*^{\beta-2}\right) > \mu_{max} - \frac{p}{d_{2_*}} L_*, \tag{5.7}$$

với

$$R_* = \left(\frac{2pE_*}{(p-2)L_*}\right)^{1/2}, E_* = \left(E(0) + \frac{1}{2}\kappa_1\right) exp(\kappa_1),\ \ \kappa_1 = \int_0^\infty \|F(t)\|_0 dt,$$

$L_* = \mu_* - \overline{g}(\infty), \mu_{max} = \max_{0 \le z \le R_*^2} \mu(z)$

Khi đó $I(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$.

Chứng minh. Do tính liên tục của $I(t)$ và $I(0) > 0$, nên tồn tại $\tilde{T} > 0$ sao cho:

$$I(t) = I\big(u(t)\big) > 0, \forall t \in [0, \tilde{T}].$$

Từ (5.3) và (5.5), ta có:

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\left\|u'(t)\right\|_0^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left((g * u)(t) + \int_0^{\|u_x(t)\|_0^2} \mu(z)dz - \bar{g}(t)\|u_x(t)\|_0^2\right)$$
$$\geq \tfrac{1}{2}\left\|u'(t)\right\|_0^2 + \tfrac{p-2}{2p}\left((g * u)(t) + L_*\|u_x(t)\|_0^2\right), \ \forall t \in [0, \tilde{T}]. \quad (5.8)$$

Từ Bổ đề 5.2, (5.8) và sử dụng bất đẳng thức Gronwall, ta thu được:

$$\|u_x(t)\|_0^2 + \tfrac{p}{(p-2)L_*}\|u'(t)\|_0^2 + \tfrac{1}{L_*}(g * u)(t) \leq \tfrac{2pE(t)}{(p-2)L_*} \leq \tfrac{2pE_*}{(p-2)L_*} \coloneqq R_*^2, \forall t \in [0, \tilde{T}]. \quad (5.9)$$

Từ điều kiện (H_3) và (5.9), ta suy ra:

$$p\int_\rho^1 xdx \int_0^{u(x,t)} f(z)dz \leq p\bar{d}_2\left(\|u(t)\|_{L^\alpha}^\alpha + \|u(t)\|_{L^\beta}^\beta\right)$$
$$\leq p\bar{d}_2(1-\rho)\left(\sqrt{\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^\alpha}\,\|u_x(t)\|_0^\alpha + \sqrt{\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^\beta}\,\|u_x(t)\|_0^\beta\right)$$
$$\leq p\bar{d}_2(1-\rho)\left(\sqrt{\left(\tfrac{1-\rho}{\rho}\right)^\alpha}\,R_*^{\alpha-2} + \sqrt{\left(\tfrac{1-\rho}{\rho}\right)^\beta}\,R_*^{\beta-2}\right)\|u_x(t)\|_0^2. \quad (5.10)$$

Do đó,

$$I(t) \geq (g * u)(t) + \eta^*\|u_x(t)\|_0^2 \geq 0, \forall t \in [0, \tilde{T}],$$

với η^* được xác định ở (5.7).

Tiếp theo, ta chứng minh $I(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$. Đặt $T_\infty^* = sup\{\tilde{T} > 0 \colon I(t) > 0, t \in [0, \tilde{T}]\}$, ta chứng minh rằng $T_\infty^* = \infty$. Thật vậy, nếu $T_\infty^* < \infty$, thì theo tính liên tục của $I(t)$, ta có $I(T_\infty^*) \geq 0$.

Có hai trường hợp cho $I(T_\infty^*)$.

Nếu $I(T_\infty^*) > 0$, lý luận tương tự như trên, ta suy ra được tồn tại $\tilde{T}_\infty > T_\infty^*$ sao cho $I(t) > 0, \forall t \in [0, \tilde{T}_\infty]$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của T_∞^* nên ta có $I(t) > 0, \forall t \geq 0$.

Nếu $I(T_\infty^*) = 0$, thì

$$0 = I(T_\infty^*) \geq (g * u)(T_\infty^*) + \eta^*\|u_x(T_\infty^*)\|_0^2 \geq 0.$$

Do đó

$$u_x(T_\infty^*) = (g * u)(T_\infty^*) = 0.$$

Hơn nữa, hàm số $s \mapsto g(T_\infty^* - s)\|u_x(s) - u_x(T_\infty^*)\|_0^2$ liên tục trên $[0, T_\infty^*]$ và $g(T_\infty^* - s) > 0, \forall s \in [0, T_\infty^*]$ và

$$(g * u)(T_\infty^*) = \textstyle\int_0^{T_\infty^*} g(T_\infty^* - s)\|u_x(s)\|_0^2 ds = 0,$$

nên $\|u_x(t)\|_0 = 0$, với mọi $s \in [0, T_\infty^*]$. Do đó $u(0) = 0$, điều này mâu thuẫn với $I(0) > 0$. Vậy $T_\infty^* = \infty$, nghĩa là $I(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$.

Bổ đề 5.3 được chứng minh. ■

Tiếp theo, ta đặt:

$$E_1(t) = \|u'(t)\|_0^2 + \|u_x(t)\|_0^2 + (g * u)(t) + I(t). \quad (5.11)$$

Lúc này, ta có bổ đề sau.

Bổ đề 5.4. *Giả sử giả thiết của Bổ đề 5.3 thỏa. Khi đó, tồn tại các hằng số dương $\beta_1, \bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_2$ sao cho*

$$\beta_1 E_1(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E_1(t), \forall t \geq 0,$$
$$\bar{\beta}_1 E_1(t) \leq E(t) \leq \bar{\beta}_2 E_1(t), \forall t \geq 0, \quad (5.12)$$

với $\delta > 0$ đủ nhỏ.
Chứng minh Bổ đề 5.4 không quá khó nên ta bỏ qua chi tiết.

Bổ đề 5.5. *Với mọi $\varepsilon_2 > 0$, và mọi $\delta_2 \in (0,1)$ ta có:*

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \le & \left\|u'(t)\right\|_0^2 + \left(\tfrac{d_2\delta_2}{p} + \tfrac{1}{2\varepsilon_2}\right)(g*u)(t) + \tfrac{1}{2\varepsilon_2}\|F(t)\|_0^2 - \tfrac{d_2\delta_2}{p} I(t) \\ & - \left(\mu_* + \eta^* \tfrac{d_2}{p}(1-\delta_2) - \left(1 + \tfrac{\varepsilon_2}{2} - \tfrac{d_2}{p}\right)\bar{g}(\infty) - \tfrac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho} - \tfrac{d_2}{p}\mu_{max}\right)\|u_x(t)\|_0^2. \quad (5.13)\end{aligned}$$

Chứng minh. Nhân $(5.1)_1$ cho $xu(x,t)$, và lấy tích phân trên đoạn $[\rho, 1]$, ta được:

$$\begin{aligned}\Psi'(t) = & \left\|u'(t)\right\|_0^2 - \mu(\|u_x(t)\|_0^2)\|u_x(t)\|_0^2 + \int_0^t g(t-s)\langle u_x(s), u_x(t)\rangle ds \\ & + \langle f(u(t)), u(t)\rangle + \langle F(t), u(t)\rangle. \quad (5.14)\end{aligned}$$

Từ các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} & -\mu(\|u_x(t)\|_0^2)\|u_x(t)\|_0^2 \le \mu_*\|u_x(t)\|_0^2, \\ & \int_0^t g(t-s)\langle u_x(s), u_x(t)\rangle ds \le \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\bar{g}(t)\,\|u_x(t)\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2}(g*u)(t), \\ & \langle f(u(t)), u(t)\rangle \le \frac{d_2}{p}\left[\int_0^{\|u_x(t)\|_0^2}\mu(z)dz + (g*u)(t) - \bar{g}(t)\|u_x(t)\|_0^2 - I(t)\right], \\ & I(t) \ge (g*u)(t) + \eta * \|u_x(t)\|_0^2, \\ & \langle F(t), u(t)\rangle \le \tfrac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho}\|u_x(t)\|_0^2 + \tfrac{1}{2\varepsilon_2}\|F(t)\|_0^2, \forall \varepsilon_2 > 0, \quad (5.15)\end{aligned}$$

ta có

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \le & \|u'(t)\|_0^2 - \mu_*\|u_x(t)\|_0^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\bar{g}(t)\|u_x(t)\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2}(g*u)(t) \\ & + \frac{d_2}{p}\left[\int_0^{\|u_x(t)\|_0^2}\mu(z)dz + (g*u)(t) - \bar{g}(t)\|u_x(t)\|_0^2 - I(t)\right] + \frac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho}\|u_x(t)\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2}\|F(t)\|_0^2 \\ \le & \|u'(t)\|_0^2 + \left(\frac{d_2}{p} + \frac{1}{2\varepsilon_2}\right)(g*u)(t) + \frac{1}{2\varepsilon_2}\|F(t)\|_0^2 - \frac{d_2\delta_2}{p}I(t) - \frac{d_2(1-\delta_2)}{p}I(t) \\ & - \left(\mu_* - \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\bar{g}(\infty) - \frac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho} - \frac{d_2}{p}\mu_{max}\right)\|u_x(t)\|_0^2 \\ \le & \|u'(t)\|_0^2 + \left(\frac{d_2\delta_2}{p} + \frac{1}{2\varepsilon_2}\right)(g*u)(t) + \frac{1}{2\varepsilon_2}\|F(t)\|_0^2 - \frac{d_2\delta_2}{p}I(t) \\ & - \left(\mu_* + \eta^*\tfrac{d_2}{p}(1-\delta_2) - \left(1 + \tfrac{\varepsilon_2}{2} - \tfrac{d_2}{p}\right)\bar{g}(\infty) - \tfrac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho} - \tfrac{d_2}{p}\mu_{max}\right)\|u_x(t)\|_0^2.\end{aligned}$$

Bổ đề 5.5 được chứng minh. ■

Đặt $\rho(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\delta}{\varepsilon_2}\right)\|F(t)\|_0^2$. Từ Bổ đề 5.2 – Bổ đề 5.5, ta suy ra

$$\begin{aligned}L'(t) \le & -\left(\lambda - \frac{\varepsilon_1}{2} - \delta\right)\|u'(t)\|_0^2 - \frac{1}{2}\xi(t)(g*u)(t) + \rho(t) + \delta\left(\frac{d_2\delta_2}{p} + \frac{1}{2\varepsilon_2}\right)(g*u)(t) \\ & - \tfrac{\delta d_2\delta_2}{p}I(t) - \delta\left(\mu_* + \eta^*\tfrac{d_1}{p}(1-\delta_2) - \left(1 + \tfrac{\varepsilon_2}{2}\right)\bar{g}(\infty) - \tfrac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho} - \tfrac{d_2}{p}\mu_{max}\right)\|u_x(t)\|_0^2. \quad (5.16)\end{aligned}$$

Ta có

$$\lim_{\substack{\delta_2 \to 0_+ \\ \varepsilon_2 \to 0_+}}\left(\mu_* + \eta^*\tfrac{d_1}{p}(1-\delta_2) - \left(1 + \tfrac{\varepsilon_2}{2}\right)\bar{g}(\infty) - \tfrac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho} - \tfrac{d_2}{p}\mu_{max}\right) = \mu_* + \eta^*\tfrac{d_1}{p} - \bar{g}(\infty) - \tfrac{d_2}{p}\mu_{max} > 0.$$

Nên, ta có thể chọn $\delta_2 \in (0,1)$ và $\varepsilon_2 > 0$ đủ nhỏ, sao cho:

$$\theta_1(\delta_2, \varepsilon_2) \equiv \mu_* + \eta^*\tfrac{d_2}{p}(1-\delta_2) - \left(1 + \tfrac{\varepsilon_2}{2}\right)\bar{g}(\infty) - \tfrac{\varepsilon_2(1-\rho)^2}{4\rho} - \tfrac{d_2}{p}\mu_{max} > 0.$$

Hơn nữa, ta cũng có thể chọn $\delta > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ đủ nhỏ, thỏa:

$$\theta_2(\varepsilon_1, \delta) \equiv \lambda - \tfrac{\varepsilon_1}{2} - \delta > 0.$$

Đặt

$$\theta_* = min\left\{\delta\theta_1, \delta\theta_1, \frac{\delta d_2\delta_2}{p}\right\},\ \ \theta_3 = \delta\left(\frac{d_2\delta_2}{p} + \frac{1}{2\varepsilon_2}\right),$$

ta có

$$L'(t) \le -\theta_* E_1(t) + (\theta_* + \theta_3)(g * u)(t) + \rho(t). \tag{5.17}$$

Kết hợp Bổ đề 5.2 (ii) và (5.17), ta suy ra:

$$\begin{aligned}\xi(t)L'(t) &\le -\theta_*\xi(t)E_1(t) + (\theta_* + \theta_3)\xi(t)(g * u)(t) + \xi(0)\rho(t)\\ &\le -\theta_*\xi(t)E_1(t) + 2(\theta_* + \theta_3)\left[-E'(t) + \frac{1}{2\varepsilon_1}\|F(t)\|_0^2\right] + \xi(0)\rho(t)\\ &\le -\theta_*\xi(t)E_1(t) - 2(\theta_* + \theta_3)E'(t) + \bar{C}_0\, exp(-\gamma_0 t),\end{aligned}$$

với $\bar{C}_0 = \left[\frac{\theta_*+\theta_3}{\varepsilon_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\delta}{\varepsilon_2}\right)\xi(0)\right] C_0$.

Đặt $N(t) = \xi(t)L(t) + 2(\theta_* + \theta_3)E(t)$, ta có:

$$\begin{aligned}N(t) &\le \left[\xi(0)\beta_2 + 2(\theta_* + \theta_3)\bar{\beta}_2\right]E_1(t) \equiv \hat{\beta}_2 E_1(t),\\ N'(t) &\le \xi'(t)L(t) + \xi(t)L'(t) + 2(\theta_* + \theta_3)E'(t)\\ &\le -\theta_*\xi(t)E_1(t) + \bar{C}_0\, exp(-\gamma_0 t)\\ &\le -\frac{\theta_*}{\hat{\beta}_2}\xi(t)N(t) + \bar{C}_0\, exp(-\gamma_0 t).\end{aligned} \tag{5.18}$$

Chọn $0 < \bar{\gamma} < min\left\{\frac{\theta_*}{\hat{\beta}_2}, \frac{\gamma_0}{\xi(0)}\right\}$, khi đó:

$$N'(t) + \bar{\gamma}\xi(t)N(t) \le \bar{C}_0\, exp(-\gamma_0 t). \tag{5.19}$$

Tích phân (5.19) dẫn đến:

$$N(t) \le \left(N(0) + \frac{\bar{C}_0}{\gamma_0 - \bar{\gamma}\xi(0)}\right) exp\left(-\bar{\gamma}\int_0^t \xi(s)ds\right). \tag{5.20}$$

Mặt khác, ta cũng có:

$$\begin{aligned}N(t) &= \xi(t)L(t) + 2(\theta_* + \theta_3)E(t) \ge 2(\theta_* + \theta_3)\bar{\beta}_1 E_1(t)\\ &\ge 2(\theta_* + \theta_3)\bar{\beta}(\|u'(t)\|_0^2 + \|u_x(t)\|_0^2).\end{aligned} \tag{5.21}$$

Do đó, ta có định lý chính của phần này như sau:

Định lý 5.6.

$$\|u'(t)\|_0^2 + \|u_x(t)\|_0^2 \le \bar{C}\, exp\left(-\bar{\gamma}\int_0^t \xi(s)ds\right), \forall t \ge 0. \tag{5.22}$$

VI. LỜI CẢM ƠN

Tác giả chân thành cảm ơn Ban biên tập, các phản biện đã có những lời phê bình và những ý kiến đóng góp có giá trị và sâu sắc để tác giả hoàn thiện bài báo.

VII. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J.A. Soriano (2001). Global existence and uniform decay rates for the Kirchhoff-Carrier equation with nonlinear dissipation, *Adv. Differ. Equat.* **6** (6) 701-730. DOI: 10.57262/ade/1357140586

[2] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J.A. Soriano (2004). Global existence and asymptotic stability for the nonlinear and generalized damped extensible plate equation, *Communications in Contemporary Math.* **6** (5) 705-731.

[3] Gongwei Liu (2014). On global solution, energy decay and blow-up for 2-D Kirchhoff equation with exponential terms, *Boundary Value Prob.* **2014**, No. 230.

[4] S.M.S. Cordeiro, D.C. Pereira, J. Ferreira, C.A. Raposo (2021). Global solutions and exponential decay to a Klein-Gordon equation of Kirchhoff-Carrrier type with strong damping and nonlinear logarithmic source term, *Partial Differential Equations in Appl. Math.* **3**: 100018.

[5] N.A. Larkin (2002). Global regular solutions for the nonhomogeneous Carrier equation, *Math. Prob. Engi.* **8**, 15-31.

[6] N.T. Long (2005). On the nonlinear wave equation $u_{tt} - B(t, \|u\|^2, \|u_x\|^2)u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t, \|u\|^2, \|u_x\|^2)$ associated with the mixed homogeneous conditions, *J. Math. Anal. Appl.* **306** (1) 243-268.
[7] N.T. Long, A.P.N. Dinh, T.N. Diem (2002). Linear recursive schemes and asymptotic expansion associated with the Kirchhoff-Carrier operator, *J. Math. Anal. Appl.* **267** (1) 116-134.
[8] N.T. Long, L.T.P. Ngoc (2012). On a nonlinear wave equation with boundary conditions of two-point type, *J. Math. Anal. Appl.* **385** (2)1070-1093.
[9] S.A. Messaoudi (2003). Blow-up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation, *Math. Nachr.* **26**0, 58-66.
[10] L.T.P. Ngọc, L.H.K. Son, T.M. Thuyet, N.T. Long (2016). Linear approximation and asymptotic expansion of solutions for a nonlinear Carrier wave equation in an annular membrane with Robin-Dirichlet conditions, *Math. Prob. Engi.* **2016**: 8031638

GENERAL DECAY ESTIMATES AND BLOW-UP FOR SOLUTIONS OF A KIRCHHOFF-CARRIER TYPE VISCOELASTIC WAVE EQUATION IN AN ANNULAR DOMAIN WITH STRONG DECAYING TERMS

Le Huu Ky Son

ABSTRACT— This study investigates a Kirchhoff-Carrier-type wave equation in an annular domain with strong decay terms. Firstly, by applying linear approximation, the Faedo-Galerkin method, and a priori estimates with compactness arguments, we prove establish the existence and uniqueness of weak solutions for the proposed problem.Next, by constructing a Lyapunov functional, we present a blow-up result for solutions with negative initial energy. Finally, we establish a sufficient condition ensuring the general decay of any global weak solution.

Keywords— Faedo-Galerkin method, Kirchhoff-Carrier type, Viscoelastic wave equation, Strong decay term; Blow-up, General decay.

Lê Hữu Kỳ Sơn là tiến sĩ Toán, chuyên ngành Toán giải tích. Hiện tại TS. Sơn là giảng viên cơ hữu thuộc Khoa Khoa học ứng dụng của Trường Đại học Công thương Thành phố Hồ Chí Minh. Lĩnh vực nghiên cứu chính là Toán giải tích, hướng nghiên cứu: Phương trình vi phân, Phương trình đạo hàm riêng.