

KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM BÀI TOÁN ROBIN-DIRICHLET CHO PHƯƠNG TRÌNH SỐNG PHI TUYẾN CHỨA SỐ HẠNG ĐÀN HỒI NHÓT

Đoàn Thị Như Quỳnh*, Dương Thị Mộng Thường

Khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Công Thương Thành phố Hồ Chí Minh

quynhdt@huit.edu.vn, thuongdtm@huit.edu.vn

TÓM TẮT— Bài báo nghiên cứu bài toán Robin-Dirichlet cho phương trình sóng phi tuyến kiểu Kirchhoff-Carrier chứa số hạng đàn hồi nhót. Bằng cách sử dụng công thức Taylor để khai triển số hạng phi tuyến đến cấp N , chúng tôi thiết lập một khai triển tiệm cận cấp cao theo một tham số bé của nghiệm.

Từ khóa— Phương trình sóng đàn hồi nhót, kiểu Kirchhoff-Carrier, bài toán Robin-Dirichlet, Khai triển tiệm cận.

I. GIỚI THIỆU

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bài toán nhiều như sau, trong đó ε là một tham số bé, với $|\varepsilon| \leq 1$:

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u_{tt} - \lambda u_{xx} - \frac{\partial}{\partial x} \left[B[u](x, t) u_x \right] + \int_0^t g(t-s) u_{xx}(x, s) ds \\ = F_\varepsilon[u](x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_x(0, t) - u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

trong đó

$$\begin{cases} B[u](x, t) = B(x, t, u(x, t), \|u(t)\|^2, \|u_x(t)\|^2), \\ F_\varepsilon[u](x, t) = f_\varepsilon[u](x, t) + \varepsilon f_{1\varepsilon}[u](x, t), \\ f_\varepsilon[u](x, t) = f(\varepsilon, x, t, u, u_t, u_x), \\ f_{1\varepsilon}[u](x, t) = f_1(\varepsilon, x, t, u, u_t, u_x), \end{cases} \quad (1.2)$$

và $\lambda > 0$ cho trước; $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, B, g, f, f_1$ là các hàm số cho trước thoả các điều kiện mà ta sẽ chỉ ra sau.

Trong phương trình (1.1)₁, số hạng phi tuyến $B(x, t, u(x, t), \|u(t)\|^2, \|u_x(t)\|^2)$ phụ thuộc vào các tích phân:

$$\|u(t)\|^2 = \int_0^1 u^2(x, t) dx, \quad \|u_x(t)\|^2 = \int_0^1 u_x^2(x, t) dx. \quad (1.3)$$

Khi $\lambda = 0, g = 0, B = 1$, trong [3], Long đã nghiên cứu khai triển tiệm cận theo một tham số bé ε của nghiệm bài toán giá trị biên và ban đầu (1.1) liên kết với điều kiện biên Robin $u_x(0, t) - h_0 u(0, t) = u_x(1, t) + h_1 u(1, t) = 0$.

Năm 2010, trong [5], Ngọc và các cộng sự thiết lập sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán Dirichlet không thuần nhất cho phương trình sóng Kirchhoff-Carrier sau

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x} \left[B(x, t, u, \|u_x\|^2) u_x \right] = f(x, t, u, u_t, u_x), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0, t) = g_0(t), u(1, t) = g_1(t), \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (1.4)$$

trong đó $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, B, f, g_0, g_1$, là các hàm cho trước thoả một số điều kiện thích hợp. Hơn nữa, dưới các điều kiện phù hợp trên các hàm cho trước, một khai triển tiệm cận của nghiệm Bài toán (1.4) theo p tham số bé $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$

* Corresponding Author

xuất hiện trong các số hạng phi tuyến B và f mà trong đó B và f lần lượt được thay bởi $B + \sum_{i=1}^p \varepsilon_i B_i$ và $f + \sum_{i=1}^p \varepsilon_i f_i$ cũng đã được thiết lập.

Năm 2019, trong [6], Ngọc và các cộng sự đã chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán Robin-Dirichlet thuần nhất cho phương trình sóng Kirchhoff-Carrier sau:

$$\begin{cases} u_{tt} - \lambda u_{xx} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_1 \left(x, t, u(x, t), \|u(t)\|^2, \|u_x(t)\|^2 \right) u_x \right] \\ + \int_0^t g(t-s) \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_2 \left(x, s, u(x, s), \|u(s)\|^2, \|u_x(s)\|^2 \right) u_x(x, s) \right] ds \\ = f \left(x, t, u, u_x, u_t, \|u(t)\|^2, \|u_x(t)\|^2 \right), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_x(0, t) - h_0 u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases} \quad (1.5)$$

Một khai triển tiệm cận của nghiệm bài toán (1.5) theo một tham số bé xuất hiện trong các số hạng phi tuyến mà trong đó f được thay bởi $f + \varepsilon f_1$ cũng đã được nghiên cứu.

Cấu trúc của bài báo này được chia thành các phần như sau: Trước tiên, chúng tôi sẽ giới thiệu một số ký hiệu, định nghĩa và các không gian hàm cùng các bổ đề cần thiết trong Phần II. Tiếp theo, chúng tôi sẽ phát biểu định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán có dạng (1.1) trong Phần III. Cuối cùng, trong Phần IV, chúng tôi thiết lập một khai triển tiệm cận của một nghiệm yếu của Bài toán (1.1) đến cấp $N+1$ theo một tham số bé ε .

II. CÔNG CỤ

Trong phần này, chúng tôi sẽ giới thiệu một số ký hiệu, định nghĩa và các không gian hàm cùng các bổ đề cần thiết trên các dữ kiện của bài toán (1.1) như sau.

Đặt $\Omega = (0, 1)$. Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian hàm thông thường và ký hiệu chúng bằng các ký hiệu $C^k = C^k(\Omega)$, $L^p = L^p(\Omega)$, $H^m = H^m(\Omega)$. Ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trong L^2 hoặc cặp tích đối ngẫu của một phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của không gian hàm. Ký hiệu $\|\cdot\|$ chỉ chuẩn trong L^2 và $\|\cdot\|_X$ là chuẩn trong không gian Banach X . Ta gọi X' là không gian đối ngẫu của X . Chúng tôi cũng sử dụng các ký hiệu: $C^k([0, T]; X)$, $L^p(0, T; X)$ để chỉ không gian các hàm khả vi liên tục cấp k từ đoạn $[0, T]$ vào không gian Banach X , không gian các hàm $u : (0, T) \rightarrow X$ đo được, sao cho $\|u\|_{L^p(0, T; X)} < +\infty$, với

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty, \\ \text{ess sup}_{0 < t < T} \|u(t)\|_X, & p = +\infty. \end{cases}$$

Ta viết $u(t), u'(t) = u_t(t), u''(t) = u_{tt}(t), u_x(t), u_{xx}(t)$, lần lượt thay cho $u(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$. Với

$$f \in C^k([0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R}^3), f = f(x, t, y_1, y_2, y_3), (x, t) \in [0, 1] \times [0, T^*], (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{ta đặt} \quad D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$D_2 f = \frac{\partial f}{\partial t}, D_{i+2} f = \frac{\partial f}{\partial y_i}, i = 1, \dots, 3 \text{ và } D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \dots D_5^{\alpha_5} f, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \in \mathbb{Z}_+^5, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_5 \leq k, D^{(0, \dots, 0)} f = f.$$

Tương tự, với $B \in C^k([0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2)$, $B = B(x, t, z_1, z_2, z_3), (x, t) \in [0, 1] \times [0, T^*], (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$, ta đặt

$$D_1 B = \frac{\partial B}{\partial x}, D_2 B = \frac{\partial B}{\partial t}, D_{j+2} B = \frac{\partial B}{\partial z_j}, j = 1, \dots, 3 \text{ và } D^\beta B = D_1^{\beta_1} \dots D_5^{\beta_5} B, \beta = (\beta_1, \dots, \beta_5) \in \mathbb{Z}_+^5, |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_5 \leq k,$$

$$D^{(0, \dots, 0)} B = B.$$

Trên $H^1 \equiv H^1(\Omega)$, ta sẽ dùng chuẩn sau đây: $\|v\|_{H^1} = \left(\|v\|^2 + \|v_x\|^2 \right)^{1/2}$.

Ta đặt $V = \{v \in H^1(0,1) : v(1) = 0\}$ và

$$a(\varphi, \psi) = \langle \varphi_x, \psi_x \rangle + \varphi(0)\psi(0) = \int_0^1 \varphi_x(x)\psi_x(x)dx + \varphi(0)\psi(0), \forall \varphi, \psi \in V. \quad (2.1)$$

Khi đó, V là không gian con đóng của H^1 và trên V ba chuẩn $v \mapsto \|v\|_{H^1}$, $v \mapsto \|v_x\|$ và $v \mapsto \|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$ là tương đương.

Mặt khác, V nhúng liên tục và trù mật trong L^2 . Ta đồng nhất L^2 với $(L^2)'$ (đối ngẫu của L^2), ta có $(L^2)'$ nhúng liên tục và trù mật trong V' . Chú ý rằng, ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cũng được sử dụng để chỉ tích đối ngẫu của V và V' .

Ta có các bổ đề sau đây:

Bổ đề 2.1. Các phép nhúng $H^1 \rightarrow C([0,1])$, $V \rightarrow C([0,1])$ là compact và

- (i) $\|v\|_{C([0,1])} \leq \sqrt{2} \|v\|_{H^1}, \forall v \in H^1$,
- (ii) $\|v\|_{C([0,1])} \leq \|v_x\| \leq \|v\|_a, \forall v \in V$,
- (iii) $\frac{1}{\sqrt{2}} \|v\|_{H^1} \leq \|v_x\| \leq \|v\|_a \leq \sqrt{2} \|v\|_{H^1}, \forall v \in V$.

Bổ đề 2.2. Dạng song tuyến tính $a(\cdot, \cdot)$ được xác định bởi (2.1) là liên tục trên $V \times V$ và cưỡng bức trên V , nghĩa là

- (i) $|a(u, v)| \leq 2 \|u_x\| \|v_x\|, \forall u, v \in V$,
- (ii) $a(v, v) \geq \|v_x\|^2, \forall v \in V$.

Trong bài này, chúng tôi cũng sử dụng các không gian Banach

$$V_T = \{v \in L^\infty(0, T; V \cap H^2) : v' \in L^\infty(0, T; V \cap H^2), v'' \in L^2(0, T; V)\},$$

$$W_1(T) = \{v \in C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; L^2) : v' \in L^2(0, T; V)\},$$

cùng các chuẩn tương ứng lần lượt là

$$\|v\|_{V_T} = \max \left\{ \|v\|_{L^\infty(0, T; V \cap H^2)}; \|v'\|_{L^\infty(0, T; V \cap H^2)}; \|v''\|_{L^2(0, T; V)} \right\},$$

$$\|v\|_{W_1(T)} = \|v\|_{C([0, T]; V)} + \|v'\|_{C([0, T]; L^2)} + \|v'\|_{L^2(0, T; V)}.$$

III. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM YẾU

Trong phần này, ta phát biểu kết quả sự tồn tại nghiệm yếu địa phương cho bài toán (3.1), (3.2) như sau:

$$\begin{cases} u_{tt} - \lambda u_{xx} - \frac{\partial}{\partial x} [B[u](x, t) u_x] + \int_0^t g(t-s) u_{xx}(x, s) ds \\ \quad \quad \quad = F[u](x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_x(0, t) - u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó

$$\begin{cases} B[u](x, t) = B(x, t, u(x, t), \|u(t)\|^2, \|u_x(t)\|^2), \\ F[u](x, t) = F(x, t, u(x, t), u'(x, t), u_x(x, t)). \end{cases} \quad (3.2)$$

Trước hết, cho trước $T^* > 0$ cố định, ta thành lập các giả thiết sau:

$$(H_1): \tilde{u}_0, \tilde{u}_1 \in V \cap H^2, \tilde{u}_{0x}(0) - \tilde{u}_0(0) = 0;$$

$$(H_2): g \in H^1(0, T^*);$$

$$(H_3): B \in C^1([0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2),$$

$$\exists b_* > 0: B(x, t, y_1, y_2, y_3) \geq b_*, \forall (x, t, y_1, y_2, y_3) \in [0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2;$$

$$(H_4): F \in C^1([0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R}^3)$$

$$F(1, t, 0, 0, y_3) = 0, \forall (t, y_3) \in [0, T^*] \times \mathbb{R}.$$

Ta định nghĩa u là nghiệm yếu của bài toán (3.1), (3.2) nếu

$$u \in \tilde{V}_T = \{v \in L^\infty(0, T; V \cap H^2) : v' \in L^\infty(0, T; V \cap H^2), v'' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; L^2)\}, \quad (3.3)$$

và u thoả phương trình biến phân như sau:

$$\langle u''(t), v \rangle + \lambda a(u'(t), v) + A[u](t; u(t), v) = \langle F[u](t), v \rangle + \int_0^t g(t-s)a(u(s), v)ds, \quad (3.4)$$

với mọi $v \in V$ và hầu hết $t \in (0, T)$, liên kết với điều kiện đầu

$$u(0) = \tilde{u}_0, u'(0) = \tilde{u}_1, \quad (3.5)$$

trong đó, $\{A[u](t; \cdot, \cdot)\}_{0 \leq t \leq T}$ là họ các dạng song tuyến tính xác định trên $V \times V$ được xác định bởi:

$$A[u](t; \varphi, \psi) = \langle B[u](t) \varphi_x, \psi_x \rangle + B[u](0, t) \varphi(0) \psi(0), \forall \varphi, \psi \in V, 0 \leq t \leq T. \quad (3.6)$$

Cho trước $T^* > 0$ cố định, với mỗi $T \in (0, T^*]$ và $M > 0$, ta đặt

$$\begin{aligned} W(M, T) &= \{v \in V_T : \|v\|_{V_T} \leq M\}, \\ W_1(M, T) &= \{v \in W(M, T) : v'' \in L^\infty(0, T; L^2)\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Khi đó, ta có định lý sau đây:

Định lý 3.1. *Giả sử các giả thiết $(H_1) - (H_4)$ đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số dương M và T sao cho bài toán (3.1), (3.2) có một nghiệm yếu duy nhất $u \in W_1(M, T)$.*

Chứng minh Định lý 3.1. Do khuôn khổ hạn chế số trang của bài báo, chúng tôi nêu phác họa chứng minh định lý này như sau.

Chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ tuyến tính bằng cách thiết lập dãy qui nạp tuyến tính $\{u_m\}$ như sau:

(i) Chọn bước lặp ban đầu $u_0 \equiv 0$.

(ii) Giả sử rằng $u_{m-1} \in W_1(M, T)$.

(iii) Ta tìm $u_m \in W_1(M, T)$ ($m \geq 1$) thoả bài toán biến phân tuyến tính:

$$\begin{cases} \langle u_m''(t), v \rangle + \lambda a(u_m'(t), v) + A_m[u](t; u_m(t), v) = \langle F[u_{m-1}](t), v \rangle + \int_0^t g(t-s)a(u_m(s), v)ds, \forall v \in V, \\ u_m(0) = \tilde{u}_0, u_m'(0) = \tilde{u}_1, \end{cases} \quad (3.8)$$

trong đó

$$\begin{cases} A[u_{m-1}](t; u, v) = \langle B[u_{m-1}](t) u_x, v_x \rangle + B[u_{m-1}](0, t) u(0) v(0), \forall u, v \in V; \\ B[u_{m-1}](x, t) = B(x, t, u_{m-1}(x, t), \|u_{m-1}(t)\|^2, \|\nabla u_{m-1}(t)\|^2); \\ F[u_{m-1}](x, t) = F(x, t, u_{m-1}(x, t), u_{m-1}'(x, t), \nabla u_{m-1}(x, t)). \end{cases} \quad (3.9)$$

Ngoài ra, sự hội tụ mạnh trong $W_1(T)$ của dãy $\{u_m\}$ về nghiệm yếu u của Bài toán (3.1), (3.2) cũng được chứng minh. Hơn nữa, tính duy nhất nghiệm yếu của Bài toán (3.1), (3.2) cũng được chứng minh nhờ vào Bổ đề Gronwall.

Trong phần này, ta xét bài toán (P_ε) phụ thuộc vào tham số bé ε , với $|\varepsilon| \leq 1$:

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u_{tt} - \lambda u_{xxt} - \frac{\partial}{\partial x}[B[u](x,t)u_x] + \int_0^t g(t-s)u_{xx}(x,s)ds \\ \quad = F_\varepsilon[u](x,t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_x(0,t) - u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_n(x), u_t(x,0) = \tilde{u}_l(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} B[u](x, t) = B(x, t, u(x, t), \|u(t)\|^2, \|u_x(t)\|^2), \\ F_\varepsilon[u](x, t) = f_\varepsilon[u](x, t) + \varepsilon f_{1\varepsilon}[u](x, t), \\ f_\varepsilon[u](x, t) = f(\varepsilon, x, t, u, u_t, u_x), \\ f_{1\varepsilon}[u](x, t) = f_1(\varepsilon, x, t, u, u_t, u_x). \end{cases} \quad (4.1)$$
$$\begin{aligned} (H_3^{(N)}) &: B \in C^{N+1}([0,1] \times [0,T^*] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2), \\ &\exists b_* > 0 : B(x, t, y_1, y_2, y_3) \geq b_*, \forall (x, t, y_1, y_2, y_3) \in [0,1] \times [0,T^*] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2; \\ (H_4^{(N)}) &: f \in C^{N+1}([-1,1] \times [0,1] \times [0,T^*] \times \mathbb{R}^3) \\ &f(\varepsilon, 1, t, 0, 0, y_3) = 0, \forall (\varepsilon, t, y_3) \in [-1,1] \times [0,T^*] \times \mathbb{R}, \\ (H_5^{(N)}) &: f_1 \in C^N([-1,1] \times [0,1] \times [0,T^*] \times \mathbb{R}^3) \\ &f_1(\varepsilon, 1, t, 0, 0, y_3) = 0, \forall (\varepsilon, t, y_3) \in [-1,1] \times [0,T^*] \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ nghiên cứu khai triển tiệm cận của u_ε theo một tham số bé ε đến cấp $N+1$, tức là ta tìm cách xấp xỉ nghiệm u_ε bởi một đa thức theo tham số bé ε : $u_\varepsilon \approx \sum_{r=0}^N u_r \varepsilon^r$, theo nghĩa, ta chỉ ra các hàm $u_r, r = 0, 1, \dots, N$ độc lập với ε sao cho ta có đánh giá $\left\| u_\varepsilon - \sum_{r=0}^N u_r \varepsilon^r \right\| \leq C_T |\varepsilon|^{N+1}$, với ε đủ bé và C_T là hằng số độc lập với ε .

Với một đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, và một véc tơ thực $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, ta đặt:

$$\begin{cases} |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N, \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!, \\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}, \\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N, \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Khi đó, ta có bổ đề lũy thừa của đa thức sau

Bổ đề 4.1. Cho $m, N \in \mathbb{N}, x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, \varepsilon \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\left(\sum_{k=1}^N x_k \varepsilon^k \right)^m = \sum_{k=m}^{mN} P_N^{[m]}[x]_k \varepsilon^k,$$

trong đó, hệ số $P_N^{[m]}[x]_k, m \leq k \leq mN$ phụ thuộc vào $x = (x_1, \dots, x_N)$ và được xác định bởi công thức sau

$$P_N^{[m]}[x]_k = \begin{cases} x_k, & 1 \leq k \leq N, m = 1, \\ \sum_{\alpha \in A_k^{[m]}(N)} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha, & m \leq k \leq mN, m \geq 2, \end{cases}$$

$$\text{với } A_k^{[m]}(N) = \left\{ \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| = m, \sum_{i=1}^N i\alpha_i = k \right\}.$$

Chứng minh bổ đề này được tìm thấy trong [4].

Gọi u_0 là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (P_0) tương ứng với $\varepsilon = 0$ như sau:

$$(P_0) \begin{cases} u_0'' - \lambda \Delta u_0' - \frac{\partial}{\partial x} [B_0(x, t) u_{0x}] + \int_0^t g(t-s) \Delta u_0(x, s) ds \\ \quad \quad \quad = F_0[u](x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_{0x}(0, t) - u_0(0, t) = u_0(1, t) = 0, \\ u_0(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_0'(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases}$$

trong đó,

$$\begin{cases} B_0(x, t) = B[u_0](x, t) = B(x, t, u_0(x, t), \|u_0(t)\|^2, \|u_{0x}(t)\|^2), \\ F_0[u](x, t) = f(0, x, t, u, u_t, u_x). \end{cases}$$

Giả sử $u_r, r = 1, \dots, N$, là các nghiệm yếu của bài toán $(\tilde{P}_r)$ như sau:

$$(\tilde{P}_r) \begin{cases} u_r'' - \lambda \Delta u_r' - \frac{\partial}{\partial x} [B_0(x, t) u_{rx}] + \int_0^t g(t-s) \Delta u_r(x, s) ds \\ \quad \quad \quad = F_r(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_{rx}(0, t) - u_r(0, t) = u_r(1, t) = 0, \\ u_r(x, 0) = u_r'(x, 0) = 0, \end{cases}$$

trong đó $B_0(x, t) = B[u_0](x, t) = B(x, t, u_0(x, t), \|u_0(t)\|^2, \|u_{0x}(t)\|^2)$ và $F_r, r = 1, \dots, N$, được xác định bởi các công thức quy nạp sau:

$$\begin{aligned} F_1 &= \pi_1[N, f, u_0, \bar{u}] + f_1[u_0] + \frac{\partial}{\partial x} (u_{0x} \rho_1[N, B, u_0, \bar{u}]), \\ F_r &= \pi_r[N, f, u_0, \bar{u}] + \pi_{r-1}[N, f_1, u_0, \bar{u}] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} (u_{0x} \rho_r[N, B, u_0, \bar{u}]) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ i+j=r}} \frac{\partial}{\partial x} (u_{jx} \rho_i[N, B, u_0, \bar{u}]), \quad 2 \leq r \leq N, \end{aligned} \quad (4.2)$$

trong đó các biểu thức $\pi_r[N, f, u_0, \bar{u}]$ và $\rho_r[N, B, u_0, \bar{u}], r = 0, 1, \dots, N$, phụ thuộc vào $u_0, \bar{u} = (u_1, \dots, u_N)$ lần lượt được xác định bởi các công thức quy nạp sau:

(i) Xác định công thức $\pi_r[N, f, u_0, \bar{u}], r = 0, 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}\pi_0[N, f, u_0, \bar{u}] &= \pi_0[N, f, u_0] = f(0, x, t, u_0, u'_0, u_{0x}), \\ \pi_r[N, f, u_0, \bar{u}] &= \sum_{\substack{1 \leq |m| \leq r \\ m=(m_1, \dots, m_4) \in \mathbb{Z}_+^4}} \frac{1}{m!} D^m f(0, [u_0]) \bar{\Phi}_{r-m_1}[m_2, m_3, m_4, N, \bar{u}], \quad 1 \leq r \leq N,\end{aligned}\quad (4.3)$$

với

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_r[m_2, m_3, m_4, N, \bar{u}] &= \sum_{(k_2, k_3, k_4) \in \bar{A}_r(m_2, m_3, m_4, N)} P_N^{[m_2]}[\bar{u}]_{k_2} P_N^{[m_3]}[\bar{u}']_{k_3} P_N^{[m_4]}[\bar{u}_x]_{k_4}, \\ \bar{A}_r(m_2, m_3, m_4, N) &= \{(k_2, k_3, k_4) \in \mathbb{Z}_+^3 : m_i \leq k_i \leq m_i N, i=2, 3, 4, k_2 + k_3 + k_4 = r\},\end{aligned}\quad (4.4)$$

(ii) Xác định công thức $\rho_r[N, B, u_0, \bar{u}], r=0, 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}\rho_0[N, B, u_0, \bar{u}] &= B[u_0], \\ \rho_r[N, B, u_0, \bar{u}] &= \sum_{\substack{1 \leq |m| \leq r \\ m=(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}_+^3}} \frac{1}{m!} D^m B([u_0]) \tilde{\Phi}_r[m, N, \bar{u}, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}], \quad 1 \leq r \leq N,\end{aligned}\quad (4.5)$$

với

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_r[m, N, \bar{u}, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}] &= \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \tilde{A}_r(m, N)} P_N^{[m_1]}[\bar{u}]_{k_1} P_{2N}^{[m_2]}[\sigma^{(1)}]_{k_2} P_{2N}^{[m_3]}[\sigma^{(2)}]_{k_3}, \\ \tilde{A}_r(m, N) &= \{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^3 : m_i \leq k_i \leq m_i N, m_i \leq k_i \leq 2m_i N, i=2, 3, k_1 + k_2 + k_3 = r\},\end{aligned}\quad (4.6)$$

trong đó, các vectơ $\sigma^{(s)} = (\sigma_1^{(s)}, \dots, \sigma_{2N}^{(s)})$, $s=1, 2$, được xác định bởi:

$$\sigma_i^{(1)} = \begin{cases} 2\langle u_0, u_1 \rangle, & i=1, \\ 2\langle u_0, u_i \rangle + \sum_{j=1}^i \langle u_j, u_{i-j} \rangle, & 2 \leq i \leq N, \\ \sum_{j=1}^i \langle u_j, u_{i-j} \rangle, & N+1 \leq i \leq 2N, \end{cases}\quad (4.7)$$

và

$$\sigma_i^{(2)} = \begin{cases} 2\langle u_{0x}, u_{1x} \rangle, & i=1, \\ 2\langle u_{0x}, u_{ix} \rangle + \sum_{j=1}^i \langle u_{jx}, u_{i-j,x} \rangle, & 2 \leq i \leq N, \\ \sum_{j=1}^i \langle u_{jx}, u_{i-j,x} \rangle, & N+1 \leq i \leq 2N. \end{cases}\quad (4.8)$$

Khi đó, ta có định lý chính trong phần này như sau.

Định lý 4.2. Giả sử các giả thiết $(H_1) - (H_2), (H_3^{(N)}) - (H_5^{(N)})$ thỏa. Khi đó, tồn tại các hằng số $M > 0$ và $T > 0$ sao cho, với mỗi ε , với $|\varepsilon| \leq 1$, Bài toán (P_ε) có một nghiệm yếu duy nhất $u_\varepsilon \in W_1(M, T)$ thỏa đánh giá tiệm cận đến cấp $N+1$ như sau:

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{r=0}^N u_r \varepsilon^r \right\|_{W_1(T)} \leq C_T |\varepsilon|^{N+1}, \quad (4.9)$$

trong đó, các hàm $u_r, r=0, 1, \dots, N$ lần lượt là các nghiệm yếu của bài toán $(P_0), (\tilde{P}_r), r=1, \dots, N$.

Chứng minh Định lý 4.2. Định lý này được chứng minh khá dài, chúng tôi xin phép được rút ngắn lại.

Ta gọi $u = u_\varepsilon \in W_1(M, T)$ là nghiệm yếu duy nhất của Bài toán (P_ε) và đặt $v = u - \sum_{r=0}^N u_r \varepsilon^r \equiv u - h = u - u_0 - h_1$. Khi đó, v là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} v'' - \lambda \Delta v' - \frac{\partial}{\partial x} [B[v+h]v_x] + \int_0^t g(t-s) \Delta v(x, s) ds \\ = f_\varepsilon[v+h] - f_\varepsilon[h] + \varepsilon (f_{1\varepsilon}[v+h] - f_{1\varepsilon}[h]) + \frac{\partial}{\partial x} [(B[v+h] - B[h])h_x] + E_\varepsilon(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ v_x(0, t) - v(0, t) = v(1, t) = 0, \\ v(x, 0) = v'(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

trong đó

$$E_\varepsilon(x, t) = f_\varepsilon[h] - f_0[u_0] + \varepsilon f_{1\varepsilon}[h] + \frac{\partial}{\partial x} [(B[h] - B[u_0])h_x] - \sum_{r=1}^N F_r \varepsilon^r. \quad (4.11)$$

Khi đó, ta có bổ đề sau.

Bổ đề 4.3. Giả sử các giả thiết $(H_1) - (H_2), (H_3^{(N)}) - (H_5^{(N)})$ thỏa. Khi đó, tồn tại một hằng số $\bar{C}_*$ sao cho

$$\|E_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq \bar{C}_* |\varepsilon|^{N+1}, \quad (4.12)$$

trong đó $\bar{C}_*$ là một hằng số chỉ phụ thuộc vào $N, T, f, f_1, B, u_r, 0 \leq r \leq N$.

Chứng minh Bổ đề 4.3. Chứng minh chi tiết tương tự như trong [6].

Cho trước $T^* > 0$ cố định và $M > 0$, ta đặt các hằng số $K_M(f), \tilde{K}_M(B)$ như sau:

$$\begin{cases} K_M(f) = \|f\|_{C^1(A_M)} = \|f\|_{C(A_M)} + \sum_{i=1}^6 \|D_i f\|_{C(A_M)}, \\ \tilde{K}_M(B) = \|B\|_{C^2(\tilde{A}_M)} = \sum_{|\beta| \leq 2} \|D^\beta B\|_{C(\tilde{A}_M)}, \end{cases}$$

với

$$\begin{cases} \|f\|_{C(A_M)} = \sup_{(\varepsilon, x, t, y_1, y_2, y_3) \in A_M} |f(\varepsilon, x, t, y_1, y_2, y_3)|, \\ \|B\|_{C(\tilde{A}_M)} = \sup_{(x, t, z_1, z_2, z_3) \in \tilde{A}_M} |B(x, t, z_1, z_2, z_3)|, \\ A_M = \{(\varepsilon, x, t, y_1, y_2, y_3) : |\varepsilon| \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T^*, |y_1|, |y_2| \leq M, |y_3| \leq \sqrt{2}M\}, \\ \tilde{A}_M = \{(x, t, z_1, z_2, z_3) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T^*, |z_1| \leq M, 0 \leq z_2, z_3 \leq M^2\}. \end{cases}$$

Tiếp theo, nhân hai vế của (22) với $v'(x, t)$ rồi lấy tích phân hai vế theo biến x , sau đó lấy tích phân hai vế theo biến t và sau một số bước biến đổi, ta thu được

$$\begin{aligned} S(t) &= 2 \int_0^t \langle E_\varepsilon(s), v'(s) \rangle ds + \int_0^t \dot{A}[v+h](s, v(s), v'(s)) ds + 2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau g(\tau-s) a(v(s), v'(\tau)) ds \\ &\quad - 2 \int_0^t [A[v+h](s, h(s), v'(s)) - A[h](s, h(s), v'(s))] ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle f_\varepsilon[v+h] - f_\varepsilon[h] + \varepsilon (f_{1\varepsilon}[v+h] - f_{1\varepsilon}[h]), v'(s) \rangle ds \equiv \sum_{i=1}^5 S_i, \end{aligned} \quad (4.13)$$

trong đó,

$$S(t) = \|v'(t)\|^2 + A[v+h](t, v(t), v'(t)) + 2\lambda \int_0^t \|v'(s)\|_a^2 ds \geq \|v'(t)\|^2 + b_* \|v(t)\|_a^2 + 2\lambda \int_0^t \|v'(s)\|_a^2 ds. \quad (4.14)$$

Đặt $M_* = (N+2)M$ và $\gamma_M = 1 + \sqrt{2}M + 4M^2$, không khó khăn để thu được các bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
S_1 &= 2 \int_0^t \langle E_\varepsilon(s), v'(s) \rangle ds \leq T \bar{C}_*^2 |\varepsilon|^{2N+2} + \int_0^t S(s) ds; \\
S_2 &= \int_0^t \dot{A}[v+h](s, v(s), v(s)) ds \leq \gamma_{M_*} \tilde{K}_{M_*}(B) \int_0^t \|v(s)\|_a^2 ds \leq \frac{1}{b_*} \gamma_{M_*} \tilde{K}_{M_*}(B) \int_0^t S(s) ds; \\
S_3 &= 2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau g(\tau-s) a(v(s), v'(\tau)) ds \\
&\leq 2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |g(\tau-s)| \|v(s)\|_a \|v'(\tau)\|_a ds \leq \frac{1}{4} S(t) + \frac{2}{\lambda b_*} T^* \|g\|_{L^2(0,T^*)}^2 \int_0^t S(s) ds; \\
S_4 &= -2 \int_0^t [A[v+h](s, h(s), v'(s)) - A[h](s, h(s), v'(s))] ds \\
&\leq 2(1+4M_*) M_* \tilde{K}_{M_*}(B) \int_0^t \|v(s)\|_a \|v'(s)\|_a ds \leq \frac{1}{4} S(t) + \frac{2}{\lambda b_*} (1+4M_*)^2 M_*^2 \tilde{K}_{M_*}^2(B) \int_0^t S(s) ds; \\
S_5 &= 2 \int_0^t \langle f_\varepsilon[v+h] - f_\varepsilon[h] + \varepsilon(f_{1\varepsilon}[v+h] - f_{1\varepsilon}[h]), v'(s) \rangle ds \\
&\leq 4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{b_*}}\right) (K_{M_*}(f) + K_{M_*}(f_1)) \int_0^t S(s) ds.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Kết hợp (4.13), (4.15) và (4.16), ta nhận được} \\
&S(t) \leq 2T \bar{C}_*^2 |\varepsilon|^{2N+2} + 2\tilde{D}_T(M) \int_0^t S(s) ds,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Kết hợp (4.13), (4.15) và (4.16), ta nhận được

$$S(t) \leq 2T \bar{C}_*^2 |\varepsilon|^{2N+2} + 2\tilde{D}_T(M) \int_0^t S(s) ds, \tag{4.17}$$

trong đó,

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_T(M) &= 1 + \frac{1}{b_*} \gamma_{M_*} \tilde{K}_{M_*}(B) + 4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{b_*}}\right) (K_{M_*}(f) + K_{M_*}(f_1)) \\
&\quad + \frac{2}{\lambda b_*} \left[(1+4M_*)^2 M_*^2 \tilde{K}_{M_*}^2(B) + T^* \|g\|_{L^2(0,T^*)}^2 \right].
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Áp dụng Bổ đề Gronwall cho (4.17), ta suy ra

$$S(t) \leq 2T \bar{C}_*^2 |\varepsilon|^{2N+2} \exp(2T \tilde{D}_T(M)). \tag{4.19}$$

Do đó, từ (4.19) dẫn tới

$$\|v\|_{W_1(T)} \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{b_*}} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) \bar{C}_* \sqrt{2T} \exp(T \tilde{D}_T(M)) |\varepsilon|^{N+1}, \tag{4.20}$$

Từ đây dẫn tới (4.9). Chứng minh Định lý 4.2 được hoàn tất.

V. KẾT LUẬN

Bài báo này khảo sát một phương trình sóng phi tuyến kiểu Kirchhoff-Carrier chứa số hạng đàn hồi nhớt liên kết với điều kiện biên Robin-Dirichlet thuần nhất và điều kiện đầu. Trước tiên, chúng tôi đã sử dụng các phương pháp thích hợp của giải tích hàm phi tuyến để phát biểu định lý (Định lý 3.1) về sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán có dạng (1.1). Sau đó, bài báo cũng đưa ra một cách tiếp cận cho vấn đề xấp xỉ nghiệm của bài toán nhiều (1.1) bởi một tham số bé, mà ta gọi là phương pháp khai triển tiệm cận nghiệm cho bài toán (1.1) đến cấp $N+1$ (Định lý 4.2). Bài báo này chỉ tập trung vào mục tiêu chính là nhấn mạnh vào các kỹ thuật và ý tưởng của phương pháp khai triển tiệm cận mà không khảo sát các kết quả khác về tính chất của nghiệm bài toán, chẳng hạn tính bùng nổ, tính tắt dần, sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào các dữ kiện.

VI. LỜI CẢM ƠN

Các tác giả chân thành cảm ơn người phản biện và Ban biên tập đã đóng góp ý kiến xác đáng dẫn đến việc cải tiến bản thảo của chúng tôi.

VII. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Alain P.N. Dinh (1983), Sur un problème hyperbolique faiblement non-linéaire en dimension 1, *Demonstratio Math.*, 16, pp.269-289.

- [2] J.L. Lions (1969), Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires, *Dunod*; Gauthier - Villars, Paris.
- [3] N.T. Long (2001), Asymptotic expansion of the solution for nonlinear wave equation with the mixed homogeneous conditions, *Nonlinear Anal.*, 45, 261-272.
- [4] N.T. Long, L.X. Truong (2007), Existence and asymptotic expansion for a viscoelastic problem with a mixed homogeneous condition, *Nonlinear Anal. TMA.*, 67 (3), 842-864.
- [5] L.T.P. Ngoc, N.A. Triet, N.T. Long (2010), On a nonlinear wave equation involving the term $-\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu(x, t, u, \|u_x\|^2) u_x \right]$: Linear approximation and asymptotic expansion of solution in many small parameters, *Nonlinear Anal. RWA.*, 11 (4), 2479-2501.
- [6] L.T.P. Ngoc, D.T.N. Quynh, N.A. Triet, N.T. Long (2019), Linear approximation and asymptotic expansion associated to the Robin-Dirichlet problem for a Kirchhoff-Carrier equation with viscoelastic term, *Kyungpook Mathematical Journal*, 59 (4), 735-769.

ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION TO THE ROBIN-DIRICHLET PROBLEM FOR THE NONLINEAR WAVE EQUATION WITH VISCOUS ELASTIC TERMS

Doan Thi Nhu Quynh, Duong Thi Mong Thuong

ABSTRACT— This paper investigates the Robin-Dirichlet problem for a Kirchhoff-Carrier type nonlinear wave equation with viscous elastic terms. By applying the Taylor expansion formula to expand the nonlinear term up to the Nth order, we construct a high-order asymptotic expansion of the solutions in terms of a small parameter.

Keywords— Viscous elastic wave equation, Kirchhoff-Carrier type, Robin-Dirichlet problem; Asymptotic expansion.



Đoàn Thị Như Quỳnh là Tiến sĩ toán, chuyên ngành Toán giải tích. Hiện tại TS. Như Quỳnh là giảng viên cơ hữu thuộc Khoa Khoa học ứng dụng của Trường Đại học Công thương Thành phố Hồ Chí Minh. Lĩnh vực nghiên cứu chính là Toán giải tích, hướng nghiên cứu Phương trình vi phân, Phương trình đạo hàm riêng.



Dương Thị Mộng Thường là Thạc sĩ toán, chuyên ngành Toán giải tích. Hiện tại ThS. Mộng Thường là giảng viên cơ hữu thuộc Khoa Khoa học ứng dụng của Trường Đại học Công thương Thành phố Hồ Chí Minh. Lĩnh vực nghiên cứu chính là Toán giải tích, hướng nghiên cứu Phương trình vi phân, Phương trình đạo hàm riêng.