

THUẬT GIẢI LẶP CẤP HAI CHO PHƯƠNG TRÌNH SỐNG PHI TUYẾN CHỨA SỐ HẠNG PHI ĐỊA PHƯƠNG

Dương Thị Mộng Thường, Đoàn Thị Như Quỳnh*

Khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Công Thương Thành phố Hồ Chí Minh
 thuongdtm@huit.edu.vn, quynhdtn@huit.edu.vn

TÓM TẮT— Bài báo nghiên cứu bài toán Dirichlet cho phương trình sóng phi tuyến chứa số hạng đàn hồi nhớt phi tuyến và số hạng phi địa phương. Bằng cách sử dụng công thức Taylor, bài báo thiết lập một thuật giải lặp cấp hai và chứng minh rằng thuật giải này hội tụ và cùng với đánh giá sai số cấp hai.

Từ khóa— Phương trình sóng phi tuyến, số hạng phi địa phương, thuật giải lặp cấp hai.

I. GIỚI THIỆU

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bài toán biên cho phương trình sóng phi tuyến chứa số hạng phi địa phương:

$$u_{tt} - \mu \left(\int_0^1 \phi(y) u(y,t) dy \right) u_{xx} + K |u|^{p-2} u + \lambda |u_t|^{q-2} u_t = f(x,t), \quad (1.1)$$

$0 < x < 1, 0 < t < T$, liên kết với các điều kiện Dirichlet:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad (1.2)$$

và điều kiện đầu:

$$u(x,0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \quad (1.3)$$

trong đó $K > 0, \lambda > 0, p > 3, q \geq 2$ là các hằng số thực, $\mu, f, \phi, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là các hàm cho trước thỏa các điều kiện mà ta sẽ chỉ ra sau. Bài toán (1.1) – (1.3) có nhiều ý nghĩa trong cơ học, được quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây [2]–[10] và các tài liệu tham khảo trong đó, điển hình như:

Năm 2018, trong [6], Nhân và các cộng sự đã nghiên cứu bài toán Robin-Dirichlet sau đây cho một phương trình sóng phi tuyến có dạng:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(x,t, \int_0^1 g(x,y,t,u(y,t),u_x(y,t)) dy \right) u_x \right] = f_1(x,t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_x(0,t) - h_0 u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (1.4)$$

trong đó $\mu, f_1, g, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là các hàm cho trước và $h_0 \geq 0$ là hằng số cho trước. Trong công trình này, các tác giả đã sử dụng phương pháp xấp xỉ tuyến tính để chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu cho bài toán (1.4) và khai triển tiệm cận của nghiệm yếu theo một tham số bé ε cho bài toán.

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x} (\mu_\varepsilon [u](x,t) u_x) = f_1(x,t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \quad (1.5)$$

liên kết với (1.4)_{2,3}, trong đó:

$$\mu_\varepsilon [u](x,t) = \mu \left(x,t, \int_0^1 g(x,y,t,u(y,t),u_x(y,t)) dy \right) + \varepsilon \mu_1 \left(x,t, \int_0^1 g_1(x,y,t,u(y,t),u_x(y,t)) dy \right). \quad (1.6)$$

Thuật giải lặp cấp cao gần đây đã được một số tác giả áp dụng để giải quyết các bài toán biên phi tuyến, xem [4], [5], [7], [9], [10] và các tài liệu tham khảo trong đó. Thuật giải lặp cấp cao được mô tả bởi việc liên kết bài toán khảo sát với một dãy qui nạp phi tuyến, đồng thời chứng minh sự hội tụ bậc cao về nghiệm yếu duy nhất của bài

* Corresponding Author

toán tương ứng. Trong [7], các tác giả đã khảo sát bài toán biên cho phương trình sóng với nguồn phi tuyến chứa số hạng phi địa phương dạng tích phân theo biến thời gian:

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,t)u_x) + \lambda u_t = f(x,t,u) + \int_0^t g(x,t,s,u(x,s))ds, \quad (1.7)$$

$0 < x < 1, 0 < t < T$, với các điều kiện biên Dirichlet, trong đó $\lambda \neq 0$ là một hằng số và $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, f, g, \mu$ là các hàm cho trước. Trong bài báo này, các tác giả đã xây dựng một dãy qui nạp phi tuyến $\{u_m\}$ liên kết với bài toán (1.7) được xác định bởi

$$u_m'' - \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,t)u_{mx}) + \lambda u_m' = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i!} D_3^i f(x,t,u_{m-1})(u_m - u_{m-1})^i + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i!} \int_0^t [D_4^i g(x,t,s,u_{m-1}(x,s))] (u_m(x,s) - u_{m-1}(x,s))^i ds, \quad (1.8)$$

và u_m thỏa mãn các điều kiện biên và điều kiện đầu tương ứng.

Trên cơ sở tham khảo các bài báo nói trên, chúng tôi nghiên cứu bài toán (1.1) – (1.3) bằng cách chia làm các phần như sau. Trước tiên, chúng tôi sẽ giới thiệu một số ký hiệu, định nghĩa và các không gian hàm cùng các bổ đề cần thiết trong Phần II. Tiếp theo, trong Phần III chúng tôi thiết lập một thuật giải lập cấp hai cho Bài toán (1.1) – (1.3). Cuối cùng, trong Phần IV, chúng tôi chứng minh sự hội tụ và đánh giá sai số của thuật giải.

II. CÔNG CỤ

Đặt $\Omega = (0,1)$. Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian hàm thông thường và ký hiệu chúng bằng các ký hiệu $L^p = L^p(\Omega)$, $H^m = H^m(\Omega)$. Ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trong L^2 hoặc cặp tích đối ngẫu của một phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của không gian hàm. Ký hiệu $\|\cdot\|$ chỉ chuẩn trong L^2 và $\|\cdot\|_X$ là chuẩn trong không gian Banach X . Ta gọi X' là không gian đối ngẫu của X . Ta kí hiệu: $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ là không gian Banach các hàm thực $u: (0,T) \rightarrow X$ đo được, sao cho $\|u\|_{L^p(0,T;X)} < +\infty$, với:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty, \\ \text{ess sup}_{0 < t < T} \|u(t)\|_X, & p = +\infty. \end{cases}$$

Ta viết $u(t)$, $u'(t) = u_t(t) = \dot{u}(t)$, $u''(t) = u_{tt}(t) = \ddot{u}(t)$, $u_x(t) = \nabla u(t)$, $u_{xx}(t) = \Delta u(t)$, lần lượt thay cho $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.

Trên $H^1 \equiv H^1(\Omega)$, ta sẽ dùng chuẩn sau đây:

$$\|v\|_{H^1} = \left(\|v\|^2 + \|v_x\|^2 \right)^{1/2}.$$

Ta đặt:

$$H_0^1 = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\},$$

Khi đó, H_0^1 là không gian con đóng của H^1 và trên H_0^1 hai chuẩn $v \mapsto \|v\|_{H^1}$ và $v \mapsto \|v_x\|$ là tương đương.

Mặt khác, H_0^1 nhúng liên tục và nằm trù mật trong L^2 . Ta đồng nhất L^2 với $(L^2)'$ (đối ngẫu của L^2), ta có $H_0^1 \rightarrow L^2 = (L^2)' \rightarrow (H_0^1)' = H^{-1}$ (nhúng liên tục trong $(H_0^1)'$). Chú ý rằng, ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cũng được sử dụng để chỉ tích đối ngẫu của H_0^1 và H^{-1} .

Ta có các bổ đề sau đây:

Bổ đề 2.1. Các phép nhúng $H^1 \rightarrow C([0,1])$, $H_0^1 \rightarrow C([0,1])$ là compact và

$$\begin{aligned} \|v\|_{C([0,1])} &\leq \sqrt{2} \|v\|_{H^1}, \quad \forall v \in H^1, \\ \|v\|_{C([0,1])} &\leq \|v_x\|, \quad \forall v \in H_0^1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \|v\|_{H^1} &\leq \|v_x\|, \quad \forall v \in H_0^1. \end{aligned}$$

Trong bài này chúng tôi cũng sử dụng các không gian Banach:

$$\begin{aligned} V_T &= \{v \in L^\infty(0, T; H^2 \cap H_0^1) : v' \in L^\infty(0, T; H_0^1), v'' \in L^2(0, T; L^2)\}, \\ W_1(T) &= C([0, T]; H_0^1) \cap C^1([0, T]; L^2), \end{aligned} \tag{2.1}$$

với các chuẩn tương ứng lần lượt là:

$$\begin{aligned} \|v\|_{V_T} &= \max \left\{ \|v\|_{L^\infty(0, T; H^2 \cap H_0^1)}; \|v'\|_{L^\infty(0, T; H_0^1)}; \|v''\|_{L^2(0, T; L^2)} \right\}, \\ \|v\|_{W_1(T)} &= \|v\|_{C([0, T]; H_0^1)} + \|v'\|_{C([0, T]; L^2)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

III. THIẾT LẬP THUẬT GIẢI LẶP CẤP HAI

Trước hết, cho $K > 0, \lambda > 0, p > 3, q \geq 2$ là các hằng số cho trước, và $T^* > 0$ cố định, ta thành lập các giả thiết sau:

- $(H_1) : \tilde{u}_0 \in H^2 \cap H_0^1, \tilde{u}_1 \in H_0^1;$
- $(H_2) : \phi \in L^2(0, 1);$
- $(H_3) : \mu \in C^1(\square)$ sao cho tồn tại hằng số $\mu_* > 0$ thỏa $\mu(y) \geq \mu_*, \forall y \in \square;$
- $(H_4) : f \in C^1([0, 1] \times [0, T^*])$ sao cho $f(0, t) = f(1, t) = 0, \forall t \in [0, T^*].$

Trong phần này, ta định nghĩa u là nghiệm yếu của Bài toán (1.1) – (1.3) nếu

$$u \in \tilde{V}_T = \{v \in L^\infty(0, T; H^2 \cap H_0^1) : v' \in L^\infty(0, T; H_0^1), v'' \in L^2(0, T; L^2)\}, \tag{3.1}$$

và u thỏa phương trình biến phân như sau:

$$\langle u''(t), v \rangle + \mu \langle \phi, u(t) \rangle \langle u_x(t), v_x \rangle + K \langle |u(t)|^{p-2} u(t), v \rangle + \lambda \langle |u'(t)|^{q-2} u'(t), v \rangle = \langle f(t), v \rangle, \tag{3.2}$$

với mọi $v \in H_0^1$, và hầu hết $t \in (0, T)$, liên kết với điều kiện đầu

$$u(0) = \tilde{u}_0, u'(0) = \tilde{u}_1, \tag{3.3}$$

trong đó, ta ký hiệu:

$$\langle \phi, u(t) \rangle = \int_0^1 \phi(y) u(y, t) dy. \tag{3.4}$$

Cho trước $T^* > 0$ cố định, với mỗi $T \in (0, T^*]$ và $M > 0$, ta đặt

$$\begin{aligned} W(M, T) &= \{v \in V_T : \|v\|_{V_T} \leq M\}, \\ W_1(M, T) &= \{v \in W(M, T) : v'' \in L^\infty(0, T; L^2)\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Bây giờ ta thiết lập thuật giải lặp cấp hai thông qua một dãy lặp $\{u_m\}$ như sau:

- (i) Chọn bước lặp ban đầu $u_0 \equiv 0$.
- (ii) Giả sử:

$$u_{m-1} \in W_1(M, T). \quad (3.6)$$

(iii) Ta tìm $u_m \in W_1(M, T)$ thỏa bài toán biến phân

$$\langle u_m''(t), v \rangle + \bar{\mu}_m(t) \langle u_{mx}(t), v_x \rangle + \lambda \langle |u_m'(t)|^{q-2} u_m'(t), v \rangle + \langle \bar{\omega}_m(t) u_m(t), v \rangle = \langle \bar{F}_m(t), v \rangle, \quad (3.7)$$

với mọi $v \in H_0^1$, và hầu hết $t \in (0, T)$, liên kết với điều kiện đầu

$$u_m(0) = \tilde{u}_0, u_m'(0) = \tilde{u}_1, \quad (3.8)$$

trong đó:

$$\begin{cases} \bar{\mu}_m(t) = \mu(\langle \phi, u_m(t) \rangle), \\ \bar{\omega}_m(x, t) = (p-1)K |u_{m-1}(x, t)|^{p-2}, \\ \bar{F}_m(x, t) = (p-2)K |u_{m-1}(x, t)|^{p-2} u_{m-1}(x, t) + f(x, t). \end{cases} \quad (3.9)$$

Khi đó, định lý sau đây cho ta kết quả về sự tồn tại của dãy lặp mô tả bởi (3.6) - (3.9).

Định lý 3.1. Giả sử các giả thiết $(H_1) - (H_4)$ đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số dương M và T sao cho tồn tại dãy lặp $\{u_m\} \subset W_1(M, T)$ xác định bởi (3.6) - (3.9).

Chứng minh Định lý 3.1. Do khuôn khổ hạn chế số trang của bài báo, chúng tôi nêu phát họa chứng minh định lý này như sau.

Sự tồn tại của dãy qui nạp (phi tuyến) $\{u_m\}$ này được chứng minh dựa vào phương pháp xấp xỉ Faedo-Galerkin (xem Lions [1]) kết hợp với các đánh giá tiên nghiệm tương tự như trong [9].

Ngoài ra, sự hội tụ mạnh trong $W_1(T)$ của dãy $\{u_m\}$ về nghiệm yếu u của Bài toán (1.1) - (1.3) cùng với đánh giá sai số cũng được chứng minh trong phần IV bên dưới đây.

IV. SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY LẶP CẤP HAI

Kết quả về sự hội tụ mạnh của dãy $\{u_m\}$ trong $W_1(T)$ về nghiệm yếu u của Bài toán (1.1) - (1.3) được cho bởi định lý sau:

Định lý 3.2. Giả sử các giả thiết $(H_1) - (H_4)$ đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số dương M và T sao cho

- (i) Bài toán (1.1) - (1.3) tồn tại duy nhất một nghiệm yếu $u \in W_1(M, T)$,
- (ii) Dãy lặp $\{u_m\}$ xác định bởi (3.6) - (3.9) hội tụ mạnh trong $W_1(T)$ và có một đánh giá tốc độ hội tụ cấp hai theo nghĩa

$$\|u_m - u\|_{W_1(T)} \leq C_T (k_T)^{2^m}, \text{ với mọi } m \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

trong đó $C_T > 0, 0 < k_T < 1$ là các hằng số độc lập với m .

Chứng minh Định lý 3.2.

Ta sẽ chứng minh rằng $\{u_m\}$ là dãy Cauchy trong $W_1(T)$.

Đặt $w_m = u_{m+1} - u_m$. Khi đó, w_m thỏa bài toán biến phân

$$\begin{cases} \langle w_m'(t), v \rangle + \bar{\mu}_{m+1}(t) \langle w_{mx}(t), v_x \rangle + \lambda \langle |u_{m+1}'(t)|^{q-2} u_{m+1}'(t) - |u_m'(t)|^{q-2} u_m'(t), v \rangle \\ = [\bar{\mu}_{m+1}(t) - \bar{\mu}_m(t)] \langle \Delta u_m(t), v \rangle - K(p-1) \langle |u_m(t)|^{p-2} u_{m+1}(t) - |u_{m-1}(t)|^{p-2} u_m(t), v \rangle \\ \quad + \langle \bar{F}_{m+1}(t) - \bar{F}_m(t), v \rangle, \forall v \in H_0^1, \\ w_m(0) = w_m'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

trong đó:

$$\begin{cases} \bar{\mu}_m(t) = \mu(\langle \phi, u_m(t) \rangle), \\ \bar{F}_m(x, t) = K(p-2)|u_{m-1}(t)|^{p-2} u_{m-1}(t) + f(x, t). \end{cases} \quad (4.3)$$

Lấy $v = w'_m(t)$ trong (4.2), sau đó lấy tích phân theo t , ta thu được

$$\begin{aligned} Z_m(t) &= \int_0^t \bar{\mu}'_{m+1}(s) \|w_{mx}(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t [\bar{\mu}_{m+1}(s) - \bar{\mu}_m(s)] \langle \Delta u_m(s), w'_m(s) \rangle ds - 2K \int_0^t \langle L_m(s), w'_m(s) \rangle ds \\ &\equiv Z_1 + Z_2 + Z_3, \end{aligned} \quad (4.4)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} Z_m(t) &= \|w'_m(t)\|^2 + \bar{\mu}_{m+1}(t) \|w_{mx}(t)\|^2 \\ &\quad + 2\lambda \int_0^t \langle |u'_{m+1}(s)|^{q-2} u'_{m+1}(s) - |u'_m(s)|^{q-2} u'_m(s), w'_m(s) \rangle ds, \\ L_m(t) &= (p-1)|u_m(t)|^{p-2} w_m(t) + |u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \\ &\quad - |u_{m-1}(t)|^{p-2} u_{m-1}(t) - (p-1)|u_{m-1}(t)|^{p-2} w_{m-1}(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Chú ý rằng do hàm $x \mapsto |x|^{q-2} x$ là đơn điệu tăng, nên

$$\int_0^t \langle |u'_{m+1}(s)|^{q-2} u'_{m+1}(s) - |u'_m(s)|^{q-2} u'_m(s), w'_m(s) \rangle ds \geq 0,$$

và $\bar{\mu}_{m+1}(t) \geq \mu_* > 0$, do đó:

$$\begin{aligned} Z_m(t) &= \|w'_m(t)\|^2 + \bar{\mu}_{m+1}(t) \|w_{mx}(t)\|^2 + 2\lambda \int_0^t \langle |u'_{m+1}(s)|^{p-2} u'_{m+1}(s) - |u'_m(s)|^{p-2} u'_m(s), w'_m(s) \rangle ds \\ &\geq \bar{\mu}_* \bar{Z}_m(t), \end{aligned}$$

trong đó $\bar{\mu}_* = \min\{1, \mu_*\}$ và

$$\bar{Z}_m(t) = \|w'_m(t)\|^2 + \|w_{mx}(t)\|^2.$$

Ta định nghĩa hằng số $\tilde{K}_M(\mu)$, như sau

$$\begin{cases} \tilde{K}_M(\mu) = \|\mu\|_{C^1([-M_1, M_1])} = \|\mu\|_{C([-M_1, M_1])} + \sum_{i=1}^2 \|D_i f\|_{C([-M_1, M_1])}, \\ \|\mu\|_{C([-M_1, M_1])} = \sup\{|\mu(y)| : |y| \leq M_1\}, \\ M_1 = \phi_* M, \phi_* = \|\phi\|_{L^2(0,1)}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Tiếp theo, ta sẽ đánh giá các tích phân bên vế phải của (4.4).

Đánh giá tích phân $Z_1 = \int_0^t \bar{\mu}'_{m+1}(s) \|w_{mx}(s)\|^2 ds$. Ta có

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{m+1}(t) &= \mu(\langle \phi, u_{m+1}(t) \rangle), \\ \bar{\mu}'_{m+1}(t) &= \mu'(\langle \phi, u_{m+1}(t) \rangle) \langle \phi, u'_{m+1}(t) \rangle, \\ |\bar{\mu}'_{m+1}(t)| &\leq \tilde{K}_M(\mu) \|\phi\| \|u'_{m+1}(t)\| \leq \tilde{K}_M(\mu) \phi_* M = \tilde{K}_M(\mu) M_1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Do đó

$$Z_1 = \int_0^t \bar{\mu}'_{m+1}(s) \|w_{mx}(s)\|^2 ds \leq \tilde{K}_M(\mu) M_1 \int_0^t \bar{Z}_m(s) ds. \quad (4.8)$$

Đánh giá tích phân $Z_2 = 2 \int_0^t [\bar{\mu}_{m+1}(s) - \bar{\mu}_m(s)] \langle \Delta u_m(s), w'_m(s) \rangle ds$. Ta có

$$\bar{\mu}_{m+1}(t) - \bar{\mu}_m(t) = \mu(\langle \phi, u_{m+1}(t) \rangle) - \mu(\langle \phi, u_m(t) \rangle) = \langle \phi, w_m(t) \rangle \mu'(\omega_m^*(t)), \quad (4.9)$$

$$\omega_m^*(t) = \theta_1 \langle \phi, u_{m+1}(t) \rangle + (1 - \theta_1) \langle \phi, u_m(t) \rangle, 0 < \theta_1 < 1.$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned} |\omega_m^*(t)| &= |\theta_1 \langle \phi, u_{m+1}(t) \rangle + (1 - \theta_1) \langle \phi, u_m(t) \rangle| \\ &\leq \|\phi\| [\theta_1 \|u_{m+1}(t)\| + (1 - \theta_1) \|u_m(t)\|] \leq \phi_* M = M_1, \end{aligned} \quad (4.10)$$

Do đó

$$|\mu'(\omega_m^*(t))| \leq \tilde{K}_M(\mu). \quad (4.11)$$

Ta suy ra

$$|\bar{\mu}_{m+1}(t) - \bar{\mu}_m(t)| = |\langle \phi, w_m(t) \rangle \mu'(\omega_m^*(t))| \leq \tilde{K}_M(\mu) \phi_* \|w_{mx}(t)\|. \quad (4.12)$$

Vậy

$$\begin{aligned} Z_2 &= 2 \int_0^t [\bar{\mu}_{m+1}(s) - \bar{\mu}_m(s)] \langle \Delta u_m(s), w'_m(s) \rangle ds \\ &\leq 2 \int_0^t |\bar{\mu}_{m+1}(s) - \bar{\mu}_m(s)| \|\Delta u_m(s)\| \|w'_m(s)\| ds \\ &\leq 2 \int_0^t \tilde{K}_M(\mu) M_1 \|w_{mx}(s)\| \|w'_m(s)\| ds \\ &\leq \tilde{K}_M(\mu) M_1 \int_0^t \bar{Z}_m(s) ds. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Đánh giá tích phân $Z_3 = -2K \int_0^t \langle L_m(s), w'_m(s) \rangle ds$. Sử dụng khai triển Taylor cho hàm $H(z) = |z|^{p-2} z$ xung quanh điểm $u_{m-1}(t)$, ta có $0 < \theta_2 < 1$ sao cho:

$$\begin{aligned} |u_m(t)|^{p-2} u_m(t) &= H(u_m(t)) \\ &= H(u_{m-1}(t)) + w_{m-1}(t) \cdot H'(u_{m-1}(t)) + \frac{1}{2} w_{m-1}^2(t) H''(\tilde{u}_m(t)) \\ &= |u_{m-1}(t)|^{p-2} u_{m-1}(t) + (p-1) w_{m-1}(t) |u_{m-1}(t)|^{p-2} \\ &\quad + \frac{1}{2} w_{m-1}^2(t) (p-1)(p-2) |\tilde{u}_m(t)|^{p-4} \tilde{u}_m(t), \end{aligned} \quad (4.14)$$

trong đó $\tilde{u}_m(t) = u_{m-1}(t) + \theta_2 w_{m-1}(t)$.

Khi đó, ta viết lại $L_m(t)$ như sau:

$$\begin{aligned} L_m(t) &= (p-1) |u_m(t)|^{p-2} w_m(t) + \left[(p-1) w_{m-1}(t) |u_{m-1}(t)|^{p-2} + \frac{1}{2} w_{m-1}^2(t) (p-1)(p-2) |\tilde{u}_m(t)|^{p-4} \tilde{u}_m(t) \right] \\ &\quad - (p-1) |u_{m-1}(t)|^{p-2} w_{m-1}(t) \\ &= (p-1) |u_m(t)|^{p-2} w_m(t) + \frac{1}{2} w_{m-1}^2(t) (p-1)(p-2) |\tilde{u}_m(t)|^{p-4} \tilde{u}_m(t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_m(x, t)| &= |u_{m-1}(x, t) + \theta_2 w_{m-1}(x, t)| \\ &\leq \theta_2 |u_m(x, t)| + (1 - \theta_2) |u_{m-1}(x, t)| \\ &\leq \theta_2 \|\nabla u_m(t)\| + (1 - \theta_2) \|\nabla u_{m-1}(t)\| \leq M, \end{aligned} \quad (4.16)$$

từ đó, ta suy ra một đánh giá cho $\|L_m(t)\|$ như sau:

$$\begin{aligned} \|L_m(t)\| &\leq (p-1) M^{p-2} \|w_m(t)\| + \frac{1}{2} (p-1)(p-2) M^{p-3} \|\nabla w_{m-1}(t)\|^2 \\ &\leq (p-1) M^{p-2} \|w_m(t)\| + \frac{1}{2} (p-1)(p-2) M^{p-3} \|w_{m-1}\|_{W_1(T)}^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ta suy ra:

$$\begin{aligned}
 Z_3 &= -2K \int_0^t \langle L_m(s), w'_m(s) \rangle ds \leq 2K \int_0^t \|L_m(s)\| \|w'_m(s)\| ds \\
 &\leq 2K \int_0^t \left[(p-1)M^{p-2} \|w_m(s)\| + \frac{1}{2}(p-1)(p-2)M^{p-3} \|w_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 \right] \|w'_m(s)\| ds \\
 &= 2K(p-1)M^{p-2} \int_0^t \|w_m(s)\| \|w'_m(s)\| ds + K(p-1)(p-2)M^{p-3} \|w_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 \int_0^t \|w'_m(s)\| ds \\
 &\leq \frac{1}{4}TK^2(p-1)^2(p-2)^2 M^{2p-6} \|w_{m-1}\|_{W_1(T)}^4 + [1 + K(p-1)M^{p-2}] \int_0^t \bar{Z}_m(s) ds \\
 &\equiv T\xi_1(M) \|w_{m-1}\|_{W_1(T)}^4 + \xi_2(M) \int_0^t \bar{Z}_m(s) ds,
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
 \xi_1(M) &= \frac{1}{4}K^2(p-1)^2(p-2)^2 M^{2p-6}, \\
 \xi_2(M) &= 1 + K(p-1)M^{p-2}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Kết hợp (4.4), (4.8), (4.13) và (4.18), ta thu được

$$\bar{Z}_m(t) \leq T\bar{\xi}_1(M) \|w_{m-1}\|_{W_1(T)}^4 + \bar{\xi}_2(M) \int_0^t \bar{Z}_m(s) ds, \tag{4.20}$$

trong đó $\bar{\xi}_1(M) = \frac{\xi_1(M)}{\bar{\mu}_*}, \bar{\xi}_2(M) = \frac{1}{\bar{\mu}_*} (\xi_2(M) + 2\tilde{K}_M(\mu)M_1)$.

Sử dụng bất đẳng thức Gronwall kết hợp với (4.20), ta suy ra

$$Z_m(t) \leq T\bar{\xi}_1(M) \|w_{m-1}\|_{W_1(T)}^4 \exp(T\bar{\xi}_2(M)). \tag{4.21}$$

Do đó ta có

$$\|w_m\|_{W_1(T)} \leq \mu_T \|w_{m-1}\|_{W_1(T)}^2, \tag{4.22}$$

với

$$\mu_T = 2\sqrt{T\bar{\xi}_1(M) \exp(T\bar{\xi}_2(M))}, \tag{4.23}$$

và với $T > 0$ đủ nhỏ sao cho $0 < k_T = M\mu_T < 1$.

Mặt khác

$$\begin{aligned}
 \|u_m - u_{m+r}\|_{W_1(T)} &\leq \|u_m - u_{m+1}\|_{W_1(T)} + \|u_{m+1} - u_{m+2}\|_{W_1(T)} + \dots + \|u_{m+r-1} - u_{m+r}\|_{W_1(T)} \\
 &\equiv \|w_m\|_{W_1(T)} + \|w_{m+1}\|_{W_1(T)} + \dots + \|w_{m+r-1}\|_{W_1(T)}, \forall m, r \in \mathbb{N}.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Từ (4.22), ta suy ra:

$$\begin{aligned}
 \|w_m\|_{W_1(T)} &\leq \mu_T \|w_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 \leq \mu_T (\mu_T \|w_{m-2}\|_{W_1(T)}^2)^2 \\
 &= \mu_T^{1+2} (\|w_{m-2}\|_{W_1(T)})^{2^2} \leq \mu_T \mu_T^2 (\mu_T \|w_{m-3}\|_{W_1(T)}^2)^{2^2} \\
 &= \mu_T^{1+2+2^2} (\|w_{m-3}\|_{W_1(T)})^{2^3} \\
 &\leq \dots \leq \mu_T^{1+2+2^2+\dots+2^{m-1}} (\|w_0\|_{W_1(T)})^{2^m} = \mu_T^{\frac{1-2^m}{1-2}} (\|w_0\|_{W_1(T)})^{2^m} \\
 &= \frac{1}{\mu_T} (\mu_T \|w_0\|_{W_1(T)})^{2^m} \leq \frac{1}{\mu_T} (\mu_T M)^{2^m} \equiv \frac{1}{\mu_T} (k_T)^{2^m}, \forall m \in \mathbb{N},
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

hay

$$\|w_i\|_{W_1(T)} \leq \frac{1}{\mu_T} (\mu_T \|w_0\|_{W_1(T)})^{2^i} \leq \frac{(M\mu_T)^{2^i}}{\mu_T} \equiv \frac{1}{\mu_T} (k_T)^{2^i}, \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.26}$$

Kết hợp (4.24) và (4.26), ta thu được

$$\begin{aligned}
\|u_m - u_{m+r}\|_{W_1(T)} &\leq \|w_m\|_{W_1(T)} + \|w_{m+1}\|_{W_1(T)} + \|w_{m+2}\|_{W_1(T)} + \dots + \|w_{m+r-1}\|_{W_1(T)} \\
&\leq \frac{1}{\mu_T} \left[(k_T)^{2^m} + (k_T)^{2^{m+1}} + (k_T)^{2^{m+2}} + \dots + (k_T)^{2^{m+r-1}} \right] \\
&= \frac{1}{\mu_T} \left[\left((k_T)^{2^m} \right)^1 + \left((k_T)^{2^m} \right)^2 + \left((k_T)^{2^m} \right)^3 + \dots + \left((k_T)^{2^m} \right)^{2^{r-1}} \right] \\
&\leq \frac{1}{\mu_T} \left[\left((k_T)^{2^m} \right)^1 + \left((k_T)^{2^m} \right)^2 + \left((k_T)^{2^m} \right)^3 + \dots + \left((k_T)^{2^m} \right)^r \right] \\
&= \frac{1}{\mu_T} (k_T)^{2^m} \frac{1 - \left((k_T)^{2^m} \right)^r}{1 - (k_T)^{2^m}} \\
&\leq \frac{1}{\mu_T} (k_T)^{2^m} \frac{1}{1 - (k_T)^{2^m}} \leq \frac{1}{\mu_T} (k_T)^{2^m} \frac{1}{1 - k_T} \\
&= \frac{1}{\mu_T} \frac{1}{1 - k_T} (k_T)^{2^m}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Vậy

$$\|u_m - u_{m+r}\|_{W_1(T)} \leq \frac{1}{\mu_T} \frac{1}{1 - k_T} (k_T)^{2^m}, \forall m, r \in \mathbb{N}. \tag{4.28}$$

Điều này chứng tỏ $\{u_m\}$ là một dãy Cauchy trong $W_1(T)$. Do đó, tồn tại $u \in W_1(T)$ sao cho

$$u_m \rightarrow u \text{ mạnh trong } W_1(T). \tag{4.29}$$

Mặt khác, do $\{u_m\} \subset W_1(M, T)$, nên ta có thể lấy ra một dãy con, vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

$$\begin{aligned}
u_m &\rightarrow u \text{ yếu* trong } L^\infty(0, T; H^2 \cap H_0^1), \\
u'_m &\rightarrow u' \text{ yếu* trong } L^\infty(0, T; H_0^1), \\
u''_m &\rightarrow u'' \text{ yếu trong } L^2(0, T; L^2), \\
u &\in W(M, T)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
\left| \bar{\mu}_m(t) - \mu(\langle \phi, u(t) \rangle) \right| &= \left| \mu(\langle \phi, u_m(t) \rangle) - \mu(\langle \phi, u(t) \rangle) \right| \\
&\leq \tilde{K}_M(\mu) \phi_* \|u_m(t) - u(t)\| \leq \tilde{K}_M(\mu) \phi_* \|u_m - u\|_{W_1(T)} \rightarrow 0;
\end{aligned}$$

do đó, ta thu được từ (4.29), rằng

$$\bar{\mu}_m(t) \rightarrow \mu(\langle \phi, u(t) \rangle) \text{ mạnh trong } L^\infty(0, T). \tag{4.31}$$

Hơn nữa, từ đẳng thức

$$\begin{aligned}
&\bar{\omega}_m(x, t) u_m(x, t) - \bar{F}_m(x, t) - K |u(x, t)|^{p-2} u(x, t) + f(x, t) \\
&= (p-1) K |u_{m-1}(x, t)|^{p-2} (u_m(x, t) - u_{m-1}(x, t)) + K \left[|u_{m-1}(x, t)|^{p-2} u_{m-1}(x, t) - |u(x, t)|^{p-2} u(x, t) \right],
\end{aligned}$$

kết hợp với việc sử dụng bất đẳng thức,

$$\left| |x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y \right| \leq (p-1) M^{p-2} |x - y|, \forall x, y \in [-M, M], \tag{4.32}$$

ta thu được từ (4.29) rằng

$$\begin{aligned}
&\left| \bar{\omega}_m(x, t) u_m(x, t) - \bar{F}_m(x, t) - K |u(x, t)|^{p-2} u(x, t) + f(x, t) \right| \\
&\leq (p-1) K |u_{m-1}(x, t)|^{p-2} |u_m(x, t) - u_{m-1}(x, t)| + K \left[|u_{m-1}(x, t)|^{p-2} u_{m-1}(x, t) - |u(x, t)|^{p-2} u(x, t) \right] \\
&\leq (p-1) K M^{p-2} \|u_m(t) - u_{m-1}(t)\|_{H_0^1} + (p-1) K M^{p-2} |u_{m-1}(x, t) - u(x, t)| \\
&\leq (p-1) K M^{p-2} \left[\|u_m - u_{m-1}\|_{W_1(T)} + \|u_{m-1} - u\|_{W_1(T)} \right].
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\bar{\omega}_m u_m - \bar{F}_m \rightarrow K |u|^{p-2} u - f \text{ mạnh trong } L^\infty(0, T; L^2). \tag{4.33}$$

Sử dụng bất đẳng thức (4.32) một lần nữa với p thay bởi q , ta có

$$\left\| |u'_m(t)|^{q-2} u'_m(t) - |u'(t)|^{q-2} u'(t) \right\| \leq (q-1) M^{q-2} \|u'_m(t) - u'(t)\| \leq (q-1) M^{q-2} \|u_m - u\|_{W_1(T)}$$

Do đó,

$$|u'_m|^{q-2} u'_m \rightarrow |u'|^{q-2} u' \text{ mạnh trong } L^\infty(0, T; L^2). \tag{4.34}$$

Qua giới hạn trong (3.7), nhờ vào (4.29), (4.30)₃₋₄, (4.31), (4.33), (4.34) ta thu được $u \in W_1(M, T)$ là nghiệm yếu của Bài toán (1.1) - (1.3).

Tính duy nhất nghiệm yếu cũng được chứng minh nhờ bất đẳng thức Gronwall.

Cố định m , cho $r \rightarrow +\infty$, ta thu được ước lượng (4.1) từ (4.28). Vậy Định lý 3.2 được chứng minh hoàn toàn. ■

V. KẾT LUẬN

Bài báo này khảo sát một phương trình sóng phi tuyến chứa số hạng đàn hồi nhớt và số hạng phi địa phương liên kết với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất và điều kiện đầu. Trước tiên, chúng tôi đã sử dụng các phương pháp thích hợp của giải tích hàm phi tuyến để phát biểu định lý (Định lý 3.1) về sự tồn tại của một dãy lặp phi tuyến. Sau đó, bài báo đã chứng minh dãy lặp này hội tụ mạnh về nghiệm yếu duy nhất của bài toán ban đầu cùng với đánh giá sai số cấp hai cũng được chứng minh (Định lý 3.2).

VI. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] J.L. Lions (1969), Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires, *Dunod*; Gauthier - Villars, Paris.
- [2] N.T. Long, L.T.P. Ngoc (2009), On nonlinear boundary value problems for nonlinear wave equations, *Vietnam J. Math.* 37 (2-3) 141 - 178.
- [3] L.T.P. Ngoc, N.A. Triet, N.T. Long (2016), Existence and decay of solutions a mixed nonlocal problem, *Vietnam Journal of Mathematics*, 44 (2), 273-293.
- [4] L.T.P. Ngoc, L.X. Truong, N.T. Long (2010), High - order iterative methods for a nonlinear Kirchhoff wave equation, *Demonstratio Math*, 43 (3), 605-634.
- [5] L.T.P. Ngoc, B.M. Tri, N.T. Long (2017), An n-order iterative scheme for a nonlinear wave equation containing a nonlocal term, *Filomat*, 32 (6), 1755-1767.
- [6] N.H. Nhan, L.T.P. Ngoc, N.T. Long (2018), On a nonlinear wave equation of Kirchhoff-Carrier type: Linear approximation and asymptotic expansion of solution in a small parameter, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2018, Article ID 3626543, 18 pages.
- [7] N.H. Nhan, L.T.P. Ngoc, T.M. Thuyet, N.T. Long (2016), On a high order iterative schemes for a nonlinear wave equation with the source term containing a nonlinear integral, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 21 (1) 65-84.
- [8] N.H. Nhan, L.T.P. Ngoc, T.M. Thuyet, N.T. Long (2017), A Robin-Dirichlet problem for a nonlinear wave equation with the source term containing a nonlinear integral, *Lithuanian Mathematical Journal*, 57 (1), 80-108.
- [9] D.T.N. Quynh, B.D. Nam, L.T.M. Thanh, T.T.M. Dung, N.H. Nhân (2021), High-order iterative scheme for a viscoelastic wave equation and numerical results, *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, Article ID 9917271, 27 pages.
- [10] L.X. Truong, L.T.P. Ngoc, N.T. Long (2009), High-order iterative schemes for a nonlinear Kirchhoff-Carrier wave equation associated with the mixed homogeneous conditions, *Nonlinear Anal. TMA*, 71 (1-2), 467-484.

A SECOND-ORDER ITERATIVE ALGORITHM FOR A NONLINEAR WAVE EQUATION WITH A NONLOCAL TERM

Dương Thị Mộng Thường, Đoàn Thị Như Quỳnh*

ABSTRACT— This paper investigates the Dirichlet problem for a nonlinear wave equation involving a nonlinear viscoelastic term and a nonlocal term. By employing a Taylor expansion, a second-order iterative algorithm is constructed. It is proven that the algorithm converges and achieves second-order error estimates.

Keywords— Nonlinear wave equation, nonlocal term, second-order iterative algorithm.



Đoàn Thị Như Quỳnh là Tiến sĩ toán, chuyên ngành Toán giải tích. Hiện tại TS. Quỳnh đang là giảng viên cơ hữu thuộc Khoa Khoa học Ứng dụng của Trường Đại học Công thương Thành phố Hồ Chí Minh. Lĩnh vực nghiên cứu chính là Toán giải tích, hướng nghiên cứu: Phương trình vi phân, Phương trình đạo hàm riêng.



Dương Thị Mộng Thường là Thạc sĩ toán, chuyên ngành Toán giải tích. Hiện tại ThS. Thường đang là giảng viên cơ hữu thuộc Khoa Khoa học Ứng dụng của Trường Đại học Công thương Thành phố Hồ Chí Minh. Lĩnh vực nghiên cứu chính là Toán giải tích, hướng nghiên cứu: Phương trình vi phân, Phương trình đạo hàm riêng.